

Zur Theorie des
Strahlensystems 1. Ordnung und 1. Klasse
und
des linearen Strahlenkomplexes.

Analytische Ableitung einiger Sätze von REYE.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der
hohen philosophischen Fakultät der Universität Leipzig
vorgelegt

von
Fritz Walther
aus Zahna i/S.

3



J e n a
Frommannsche Buchdruckerei
(Hermann Pohle)
1889.

Seinem lieben Vater

und

dem Andenken seiner unvergesslichen Mutter

in Dankbarkeit gewidmet

vom

Verfasser.

THE F. B. I. (1911-1912)

THE F. B. I. (1911-1912)

THE F. B. I. (1911-1912)

Im 69. Bande des CRELLE'schen Journal für Mathematik, auf Seite 365 u. f., hat TH. REYE eine Anzahl von interessanten geometrischen Sätzen veröffentlicht; dieselben beziehen sich auf die Entwicklung des linearen Strahlenkomplexes aus dem Strahlensysteme erster Ordnung und Klasse, und des MÖBIUS'schen Nullsystems aus dem linearen Strahlenkomplex, und enthalten eine Reihe von wichtigen Eigenschaften dieser 3 geometrischen Gebilde. Der Beweis der mitgeteilten Resultate wird in der Abhandlung nicht gegeben; doch ist es nicht schwer, dieselben auf synthetischem Wege herzuleiten, wenn man REYE's bekanntes Werk „Die Geometrie der Lage“ zu Hilfe nimmt; dasselbe entwickelt ausführlich fast sämtliche Sätze der Abhandlung, allerdings in umgekehrter Reihenfolge, da das Nullsystem zu Grunde gelegt wird und aus demselben der Strahlenkomplex und weiter das Strahlensystem abgeleitet werden. Die Sätze der REYE'schen Abhandlung sind aber interessant und wichtig genug, um das Unternehmen zu rechtfertigen, auch auf ganz anderm Wege zu ihnen zu gelangen. Ein solches Unternehmen stellt die vorliegende Arbeit dar, die es versucht, durch rein analytisches Verfahren die Resultate von REYE aufzufinden. Sie hat sich dabei an verschiedenen Stellen, wie im § 6 und im § 13, auf zwei ältere Arbeiten stützen können, die gleich hier genannt werden mögen: es sind die Abhandlungen von HERMES (CRELLE's Journal Bd. 67) und MÖBIUS (CRELLE's Journal Bd. 10). Was die Reihenfolge der Resultate betrifft, so schließt sich die Arbeit im großen und ganzen an die REYE'sche Abhandlung an, da es nicht geraten erscheint, die Sätze zum Zwecke anderer Anordnung aus ihrem schönen Zusammenhange zu lösen. Nur innerhalb der einzelnen Paragraphen, die den Nummern der Abhandlung entsprechen, sind die Sätze zuweilen umgestellt worden, wenn dadurch die analytische Entwicklung sich bequemer gestaltete.

Da im Folgenden zwei Arten von räumlichen Koordinatensystemen gebraucht werden, nämlich dasjenige der homogenen Tetraederkoordinaten und das gewöhnliche schief- oder rechtwinklige kartesische, so mögen hier als Einleitung der eigentlichen Abhandlung einige kurze Bemerkungen über beide Systeme vorangeschickt werden.

Man denke sich ein beliebiges Tetraeder im Raume festgelegt. Die Seitenflächen desselben sollen $A_1 A_2 A_3 A_4$ heißen und die Flächeninhalte derselben, gemessen mit dem Quadrate der Längeneinheit, bezw. $S_1 S_2 S_3 S_4$ sein. V sei das dreifache Volumen des Tetraeders, gemessen mit dem Kubus der Längeneinheit. Die Lage eines beliebigen Punktes P im Raume wird völlig bestimmt sein, wenn seine Abstände von den 4 Seiten des Tetraeders bekannt sind. Diese Abstände werden durch die Lote gemessen, die man von P auf die 4 Seitenflächen fällt; ihre Längen seien, verglichen mit der Längeneinheit, $\pm p_1, \pm p_2, \pm p_3, \pm p_4$. Dann besteht die Gleichung $S_1 p_1 + S_2 p_2 + S_3 p_3 + S_4 p_4 = V$. V sowohl wie $S_1 S_2 S_3 S_4$ sind konstant und gegeben; zwischen den 4 Größen p , welche die Lage des Punktes P bestimmen, herrscht also eine lineare Gleichung, die es ermöglicht, aus 3 gegebenen Größen p die vierte zu berechnen. Um die Lage eines beliebigen Punktes P zu bestimmen, ist also nur die Kenntnis von 3 Loten auf die Seitenflächen des Tetraeders erforderlich, wie dies auch von vornherein einleuchtet.

Nimmt man nun einen festen Punkt E im Raume an, dessen Lote auf die Ebenen $A_1 A_2 A_3 A_4$ die Länge $e_1 e_2 e_3 e_4$ haben, und mißt mit diesen Längen die entsprechenden von P , so mögen die entstehenden Quotienten $\frac{p_1}{e_1}, \frac{p_2}{e_2}, \frac{p_3}{e_3}, \frac{p_4}{e_4}$ mit $\mu x, \mu y, \mu z, \mu w$ bezeichnet werden. $x y z w$ heißen hierbei die tetraedrischen Koordinaten des Punktes P ; sie sind unbenannte Zahlen. Durch ein bestimmtes Wertsystem $x y z w$ ist ein Punkt P eindeutig bestimmt. Es ist nämlich $p_1 = \mu x e_1, \dots p_4 = \mu w e_4$. In diesen 4 Gleichungen ist nur μ unbekannt; den Wert desselben findet man aus der Gleichung $\mu \{ S_1 x e_1 + S_2 y e_2 + S_3 z e_3 + S_4 w e_4 \} = V$. Also kennt man $p_1 p_2 p_3 p_4$, d. h. die Lage von P ist eindeutig fixiert. Es genügt aber, um die Lage eines Punktes P zu bestimmen, daß die Verhältnisse der tetraedrischen Koordinaten $x y z w$ bekannt sind. Ist z. B. $\frac{x}{w} = a, \frac{y}{w} = b, \frac{z}{w} = c$ gegeben, so ist, da wieder $\mu x e_1 \dots \mu w e_4$ die 4 Lote von P auf die Tetraederflächen darstellen, die Gleichung erfüllt:

$$\mu w \{ S_1 a e_1 + S_2 b e_2 + S_3 c e_3 + S_4 e_4 \} = V.$$

Daraus läßt sich μw bestimmen. Ist dieses aber bekannt, so sind auch $p_4 = (\mu w)e_4$, $p_3 = (\mu w)ce_3$, $p_2 = (\mu w)be_2$, $p_1 = (\mu w)ae_1$ bekannt, d. h. die Lage von P ist völlig bestimmt.

In analoger Weise wie die Lage eines Punktes wird die einer Ebene Π im Raume bestimmt. Ihre Abstände von den den Seiten $A_1 A_2 A_3 A_4$ gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders seien $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$, die entsprechenden einer festen Ebene E seien $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$.

Die Quotienten $\frac{\pi_1}{\varepsilon_1}, \frac{\pi_2}{\varepsilon_2}, \frac{\pi_3}{\varepsilon_3}, \frac{\pi_4}{\varepsilon_4}$ bezeichnet man mit $\nu\xi, \nu\eta, \nu\zeta, \nu\omega$, dann heißen $\xi \eta \zeta \omega$ die tetraedrischen Koordinaten der Ebene Π . Es ist wieder leicht zu zeigen, daß zur Bestimmung der Lage einer Ebene Π die Kenntnis der Verhältnisse der Koordinaten $\xi \eta \zeta \omega$ ausreicht.

Über die Lage der Tetraederseiten, sowie über die des festen Punktes E war nichts bestimmt worden. Man kann also die Seite A_4 ins Unendliche rücken lassen und den Punkt E so wählen, daß $e_1 = e_2 = e_3 = 1$ wird. Dann ist $p_1 = \mu x$, $p_2 = \mu y$, $p_3 = \mu z$, $\frac{p_4}{e_4} = \mu w = 1$. Also ist $\mu = \frac{1}{w}$, folglich

$$p_1 = \frac{x}{w} = X$$

$$p_2 = \frac{y}{w} = Y$$

$$p_3 = \frac{z}{w} = Z.$$

Wählt man noch die Ebenen $A_1 A_2 A_3$ so, daß sie aufeinander senkrecht stehen, so sind $X Y Z$, d. h. die Quotienten der Tetraederkoordinaten, mit den gewöhnlichen rechtwinkligen kartesischen Koordinaten identisch. Die letzten Entwicklungen stellen also den Zusammenhang der beiden Koordinatensysteme dar.

§ 1.

Zwei räumliche Systeme heißen kollinear, wenn jedem Punkte P_1 des ersten ein Punkt P_2 des zweiten, und jeder P_1 enthaltenden Ebene des ersten eine P_2 enthaltende Ebene des zweiten zugeordnet ist.

Zwei räumliche Systeme heißen reziprok, wenn jedem Punkte P_1 des ersten eine Ebene E_2 des zweiten und jeder P_1 enthaltenden Ebene des ersten ein in E_2 liegender Punkt des zweiten zugeordnet ist.

Analytisch wird die kollineare bzw. reziproke Beziehung von 2 räumlichen Systemen jedes Mal durch 2 Systeme von Gleichungen ausgedrückt, die zwischen den Punkt- und Ebenenkoordinaten der beiden Räume bestehen.

Legt man ein beliebiges Koordinaten-Tetraeder zu Grunde und bezeichnet die Punktkoordinaten des ersten räumlichen Systems mit $x_0 \ y_0 \ z_0 \ w_0$, die des zweiten mit $x_1 \ y_1 \ z_1 \ w_1$, entsprechend die Ebenenkoordinaten des ersten mit $\xi_0 \ \eta_0 \ \zeta_0 \ \omega_0$, die des zweiten mit $\xi_1 \ \eta_1 \ \zeta_1 \ \omega_1$, so bestehen folgende Gleichungen, durch welche, wie leicht zu ersehen ist, die kollineare, bzw. reziproke Beziehung der beiden räumlichen Systeme völlig bestimmt ist:

Bei Kollinearität:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \left. \begin{aligned} \mu x_1 &= \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0 + \delta_1 w_0 \\ \mu y_1 &= \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0 + \delta_2 w_0 \\ \mu z_1 &= \alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0 \\ \mu w_1 &= \alpha_4 x_0 + \beta_4 y_0 + \gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0 \end{aligned} \right\} \text{ und} \\
 (\beta) \quad & \left. \begin{aligned} v \xi_0 &= \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \eta_1 + \alpha_3 \zeta_1 + \alpha_4 \omega_1 \\ v \eta_0 &= \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \eta_1 + \beta_3 \zeta_1 + \beta_4 \omega_1 \\ v \zeta_0 &= \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \eta_1 + \gamma_3 \zeta_1 + \gamma_4 \omega_1 \\ v \omega_0 &= \delta_1 \xi_1 + \delta_2 \eta_1 + \delta_3 \zeta_1 + \delta_4 \omega_1 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Bei Reziprozität:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \left. \begin{aligned} m \xi_1 &= a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 + d_1 w_0 \\ m \eta_1 &= a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2 w_0 \\ m \zeta_1 &= a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3 w_0 \\ m \omega_1 &= a_4 x_0 + b_4 y_0 + c_4 z_0 + d_4 w_0 \end{aligned} \right\} \text{ und} \\
 (b) \quad & \left. \begin{aligned} n \xi_0 &= a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 + a_4 w_1 \\ n \eta_0 &= b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1 + b_4 w_1 \\ n \zeta_0 &= c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1 + c_4 w_1 \\ n \omega_0 &= d_1 x_1 + d_2 y_1 + d_3 z_1 + d_4 w_1 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Auf den vorstehenden Gleichungen beruhen die folgenden Untersuchungen.

Sind zwei kollineare räumliche Systeme gegeben, so entspricht einer beliebigen Ebene E_1 des ersten eine bestimmte Ebene E_2 des zweiten. Allen Punkten von E_1 sind Punkte zugeordnet, die auf E_2 liegen. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind also Träger je einer zweifach unendlichen Schar von Punkten, die durch die Kollinearität der beiden Räume einander derart zugeordnet sind, daß jedem Punkte auf E_1 ein bestimmter auf E_2 und umgekehrt entspricht. Als Träger

dieser Punktescharen nennt man E_1 und E_2 zwei ebene Systeme, die aufeinander kollinear bezogen sind. 2 kollineare ebene Systeme sind also Teile von 2 räumlichen Systemen, und für die Beziehung ihrer Punkte aufeinander gelten die obigen Gleichungen (α) der Kollinearität.

Handelt es sich nun darum, die kollineare Beziehung von 2 ebenen Systemen zu untersuchen, so wird eine passende Wahl des Koordinatensystemes die Aufgabe wesentlich erleichtern. Macht man die Ebene des ersten Systemes zu der Seitenfläche A_1 des Koordinaten-Tetraeders, so kann ihre Gleichung $x_0 = 0$ geschrieben werden; ihre Koordinaten sind also $\xi_0 \ 0 \ 0 \ 0$. Die Koordinaten der Ebene des zweiten Systems ergeben sich dann aus den Gleichungen (β) der Kollinearität. Das Koordinatensystem kann nun so gewählt werden, daß die Ebene des zweiten kollinearen Systemes mit der Tetraederfläche A_2 identisch wird; dann ist ihre Gleichung $y_1 = 0$, und ihre Koordinaten sind $0 \ \eta_1 \ 0 \ 0$. Dies geschieht, wie sich leicht aus den Gleichungen (β) ergibt, nur dann, wenn die Kollinearitätskonstanten β_2 , γ_2 und δ_2 allesamt gleich Null werden. Setzt man diese Werte für β_2 , γ_2 , δ_2 in die Gleichungen (α) und (β) ein, so vereinfachen sich dieselben erheblich.

Im Allgemeinen wird der Schnittgeraden der beiden Ebenen der kollinearen Systeme durch die Kollinearität der beiden räumlichen Systeme eine gewisse andere Gerade zugeordnet sein, die mit der ersten keinen Punkt gemein hat. In speziellen Fällen haben beide Geraden einen Punkt gemein. Der speziellste Fall aber, der hier allein betrachtet werden soll, ist der, daß sie in eine Gerade zusammenfallen. Diese Gerade ist bei unserer Wahl des Koordinatensystemes der Schnitt der Ebenen $x = 0$ und $y = 0$. Dieselbe hat die ausgezeichnete Eigenschaft, daß jedem ihrer Punkte, zum ersten räumlichen Systeme gerechnet, ein anderer ebenfalls auf ihr liegender Punkt, zum zweiten räumlichen Systeme gerechnet, zugeordnet ist. Soll sich diese Beziehung aus den Gleichungen (α) der Kollinearität ergeben, so müssen in ihnen die Konstanten solche Werte haben, daß jedem Wertsysteme $(0, 0, z_0, w_0)$ ein anderes $(0, 0, z_1, w_1)$ entspricht: d. h. es müssen, wie leicht zu ersehen ist, auch noch γ_1 und δ_1 gleich Null sein.

Da bisher über die Lage der beiden Tetraederflächen A_3 und A_4 , deren Gleichungen $z = 0$ und $w = 0$ sind, keine Bestimmungen getroffen worden sind, so sollen jetzt dieselben so gewählt werden, daß ihre Schnittgerade zwei beliebige, einander zugeordnete Punkte der beiden kollinearen ebenen Systeme verbindet. Damit ist gesagt,

daß die Gleichungen (α) so beschaffen sind, daß durch sie dem Punkte $(0 \ y_0 \ 0 \ 0)$ der Punkt $(x_1 \ 0 \ 0 \ 0)$ zugeordnet ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn noch $\beta_3 = \beta_4 = 0$ ist.

Es gewinnen also, wenn alle bisher gestellten Forderungen erfüllt sind, die Gleichungen der Kollinearität folgende einfache Gestalt:

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & \begin{cases} \mu x_1 = \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 \\ \mu y_1 = \alpha_2 x_0 \\ \mu z_1 = \alpha_3 x_0 + \gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0 \\ \mu w_1 = \alpha_4 x_0 + \gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0 \end{cases} \quad \text{und} \\
 (\beta') \quad & \begin{cases} \nu \xi_0 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \eta_1 + \alpha_3 \zeta_1 + \alpha_4 \omega_1 \\ \nu \eta_0 = \beta_1 \xi_1 \\ \nu \zeta_0 = \gamma_3 \xi_1 + \gamma_4 \omega_1 \\ \nu \omega_0 = \delta_3 \xi_1 + \delta_4 \omega_1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Es sollen nun die Gleichungen der Geraden aufgestellt werden, welche 2 beliebige, einander zugeordnete Punkte der kollinearen ebenen Systeme miteinander verbindet. Die beiden Punkte haben die Koordinaten $0 \ y_0 \ z_0 \ w_0$ und $x_1 \ 0 \ z_1 \ w_1$, zwischen welchen die Gleichungen (α') bestehen. Bezeichnet man mit $x \ y \ z \ w$ die laufenden Koordinaten, so sind die Gleichungen der verbindenden Geraden:

$$\frac{w_0 x}{w_0 x_1} = \frac{w_0 y - y_0 w}{-y_0 w_1} = \frac{w_0 z - z_0 w}{w_0 z_1 - z_0 w_1}.$$

Setzt man für $y_1 \ z_1 \ w_1$ die Werte ein, die sich aus den Gleichungen (α') ergeben, so werden die letzten Gleichungen zu folgenden:

$$\begin{aligned}
 \frac{w_0 x}{\beta_1 y_0 w_0} &= \frac{w_0 y - y_0 w}{-\gamma_4 y_0 z_0 - \delta_4 y_0 w_0} = \\
 &= \frac{w_0 z - z_0 w}{-\gamma_4 z_0^2 + (\gamma_3 - \delta_4) z_0 w_0 + \delta_3 w_0^2}
 \end{aligned}$$

Dafür kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & (\gamma_4 y_0 z_0 + \delta_4 y_0 w_0) \cdot x + \beta_1 y_0 w_0 \cdot y - \beta_1 y_0^2 \cdot w = 0 \\
 & (-\gamma_4 z_0^2 + (\gamma_3 - \delta_4) z_0 w_0 + \delta_3 w_0^2) \cdot x - \beta_1 y_0 w_0 \cdot z + \beta_1 y_0 z_0 \cdot w = 0
 \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen hebt sich y_0 heraus. Statt der zweiten kann diejenige gesetzt werden, welche durch Addition der zweiten zu der von ihrem Faktor y_0 befreiten und mit z_0 multiplizierten ersten Gleichung entsteht. Die Gleichungen der Geraden werden dadurch

$$\begin{aligned}
 & (\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0) \cdot x + \beta_1 w_0 \cdot y - \beta_1 y_0 \cdot w = 0 \\
 & (\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0) \cdot x + \beta_1 z_0 \cdot y - \beta_1 y_0 \cdot z = 0
 \end{aligned} \quad (S)$$

Diese Gleichungen (S) enthalten die Koordinaten $y_0 \ z_0 \ w_0$ eines Punktes auf der Ebene $x = 0$ als Parameter, und zwar in homogener

Form. Läßt man daher die Parameter alle möglichen Werte annehmen, so erhält man eine zweifach unendliche Schar von Geraden, die je 2 zugeordnete Punkte der beiden kollinearen ebenen Systeme verbinden, d. h. ein Strahlensystem. Jeder Strahl desselben ist durch die Gleichungen (S) völlig bestimmt, wenn man die ihm entsprechenden Werte der Parameter $y_0 z_0 w_0$ oder wenigstens deren Verhältnis kennt.

Es geht also durch jeden Punkt $y_0 z_0 w_0$ der Ebene $x = 0$ ein einziger Strahl des Systems S. Aber es geht auch durch jeden Punkt des Raumes überhaupt im Allgemeinen nur ein Systemsstrahl. Denn giebt man den laufenden Koordinaten $x y z w$ konstante Werte, so lassen sich aus den beiden Gleichungen (S) die Verhältnisse $y_0 : z_0 : w_0$, die in ihnen linear vorkommen, als rationale Funktionen von $x y z w$ ausdrücken; es gehört also zu jedem Wertsystem $(x y z w)$ im Allgemeinen ein einziges Wertsystem $(y_0 z_0 w_0)$, also auch ein einziger Strahl des Systems.

Das Strahlensystem S ist also von erster Ordnung.

Betrachtet man eine beliebige Ebene im Raume, deren Gleichung $\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w = 0$ sei, so wird dieselbe in dem Falle einen Strahl des Systems enthalten, wenn die beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$\eta \cdot y_0 + \zeta \cdot z_0 + \omega \cdot w_0 = 0$$

$$\xi \cdot \beta_1 y_0 + \zeta \cdot (\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0) + \omega \cdot (\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0) = 0.$$

Beide Gleichungen sind homogen und linear in $y_0 z_0 w_0$; es liegt also in jeder Ebene des Raumes im Allgemeinen ein einziger Systemsstrahl.

Das Strahlensystem S ist also von erster Klasse.

§ 2.

Da sich $y_0 : z_0 : w_0$ als rationale Funktionen von $x y z w$ aus den Gleichungen (S) des § 1 ausdrücken lassen, so geht, wie gezeigt worden ist, im Allgemeinen nur ein einziger Strahl des Systems S durch jeden Punkt des Raumes. Eliminiert man y_0 aus den beiden Gleichungen (S), so ergiebt sich als resultierende Gleichung folgende:

$$(-\gamma_4 xz + \gamma_3 xw + \beta_1 yw)z_0 + (-\delta_4 xz + \delta_3 xw - \beta_1 yz)w_0 = 0. \quad (1)$$

Dieselbe liefert für konstante Werte $x y z w$ im Allgemeinen einen einzigen Wert des Verhältnisses $z_0 : w_0$, zu welchem dann durch Einsetzen dieses Wertes in eine der Gleichungen (S) ein einziger Wert für $y_0 : w_0$ hinzukommt. Damit ist der durch den Punkt $(x y z w)$ gehende Strahl von S völlig bestimmt. Mehr als einen Wert liefert die resultierende Gleichung (1) nur in dem Falle, daß beide Koeffizienten derselben verschwinden, d. h. daß zugleich

$$\begin{aligned} -\gamma_4 xz + \gamma_3 xw + \beta_1 yw &= 0 \\ -\delta_4 xz + \delta_3 xw - \beta_1 yw &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

In diesem Falle hat das Verhältnis $z_0 : w_0$ unendlich viele Werte; es gehen also durch Punkte des Raumes, deren Koordinaten den Gleichungen (2) genügen, unendlich viele Strahlen des Systems.

Die Gleichungen (2) stellen 2 Regelflächen 2ter Ordnung dar; dieselben haben also eine Kurve 4ter Ordnung miteinander gemein, welche auch in verschiedene Kurven niederer Ordnung degenerieren kann. Die Schnittkurve soll jetzt untersucht werden. Zu diesem Behufe bilde man die Gleichungen der beiden Regelscharen, die auf den Regelflächen liegen. Dieselben lauten

bei der ersten Regelfläche:

$$\begin{cases} \beta_1 y = \kappa_1 (\gamma_4 z - \gamma_3 w) \\ \kappa_1 w = x \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \beta_1 y = \lambda_1 x \\ \lambda_1 w = \gamma_4 z - \gamma_3 w \end{cases}$$

bei der zweiten Regelfläche:

$$\begin{cases} \beta_1 y = \kappa_2 (-\delta_4 z + \delta_3 w) \\ \kappa_2 z = x \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \beta_1 y = \lambda_2 x \\ \lambda_2 z = -\delta_4 z + \delta_3 w. \end{cases}$$

Zur ersten Regelschar der ersten wie der zweiten Fläche gehören die Strahlen $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$. Die zweiten Regelscharen haben ebenfalls 2 Gerade gemein. Man erhält ihre Gleichungen, wenn man λ_1 oder λ_2 gemäß der Gleichung

$$\lambda^2 + (\gamma_3 + \delta_4)\lambda = \gamma_4\delta_3 - \gamma_3\delta_4$$

bestimmt.

Die beiden Regelflächen gemeinsame Kurve 4ter Ordnung degeneriert also in ein System von 4 Geraden. Die Gleichungen der ersten von ihnen sind $x = 0$, $y = 0$, die der zweiten $z = 0$, $w = 0$; die der 3ten und 4ten lauten zusammengefaßt:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_3 + \delta_4 + \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3}) \cdot x + 2\beta_1 \cdot y &= 0 \\ 2\gamma_4 \cdot z + (\delta_4 - \gamma_3 + \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3}) \cdot w &= 0 \end{aligned} \right\} (A_1) \text{ u. } (A_2).$$

Je nachdem das obere oder das untere Vorzeichen in den letzten beiden Gleichungen genommen wird, stellen dieselben die 3te Gerade A_1 oder die 4te Gerade A_2 dar.

Um diejenigen Strahlen des Systems S zu finden, welche diese beiden Geraden schneiden, muß man die Determinante der Gleichungen (A_1) oder (A_2) und der Gleichungen (S) bilden, und dieselbe gleich Null setzen. Dadurch erhält man eine Gleichung in $y_0 z_0 w_0$, den Bestimmungsstücken eines Strahles, nämlich:

$$\begin{vmatrix} \gamma_3 + \delta_4 + \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3} & 2\beta_1 & . & . \\ . & . & 2\gamma_4 & \delta_4 - \gamma_3 + \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3} \\ \gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0 & \beta_1 w_0 & . & -\beta_1 y_0 \\ \gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0 & \beta_1 z_0 & -\beta_1 y_0 & . \end{vmatrix} = 0.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Koeffizienten dieser Gleichung verschwinden, die Gleichung also eine identische ist. Daraus ergibt sich, daß sämtliche Strahlen des Systems S die beiden Geraden A_1 und A_2 schneiden. Nun heißen aber gerade Linien, welche von allen Strahlen eines Systems getroffen werden, Achsen (oder Brennpunkten) desselben; A_1 und A_2 sind also 2 Achsen von S .

Sie sind aber auch die einzigen Achsen von S . Denn hat man eine beliebige Gerade, deren Gleichungen

$$\begin{cases} m_1 x + n_1 y + q_1 w = 0 \\ m_2 x + p_2 z + q_2 w = 0 \end{cases} \quad (3)$$

sein mögen, so ist die Bedingung dafür, daß dieselbe alle Strahlen des Systems schneidet, die, daß die aus den Gleichungen (3) und (S) gebildete Determinante identisch $= 0$ werde.

Diese Bedingungsgleichung läßt sich nach Potenzen von $y_0 z_0 w_0$ ordnen und gewinnt dadurch folgende Form:

$$\beta_1 m_2 n_1 \begin{vmatrix} y_0^2 + \gamma_4 n_1 q_2 & y_0 z_0 + \delta_4 n_1 q_2 & y_0 w_0 - \gamma_4 p_2 q_1 & z_0^2 - \delta_4 p_2 q_1 & z_0 w_0 + \delta_3 p_2 q_1 & w_0^2 \\ + \gamma_3 n_1 p_2 & + \delta_3 n_1 p_2 & & + \gamma_3 p_2 q_1 & & \\ -\beta_1 m_1 p_2 & -\beta_1 m_1 q_2 & & & & \\ + \beta_1 m_2 q_1 & & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Soll diese Gleichung eine identische werden, so müssen die Koeffizienten einzeln $= 0$ werden. Dadurch ergeben sich 6 Bedingungsgleichungen für die Konstanten $m_1 n_1 q_1$ und $m_2 p_2 q_2$, von denen aber nur 4 unabhängig von einander sind. Da es sich nur um die Bestimmung der Verhältnisse $m_1 : n_1 : q_1$ und $m_2 : p_2 : q_2$ handelt, so reichen diese 4 Gleichungen vollkommen aus. Es ist also:

$$\begin{aligned}
 m_2 n_1 &= 0 \\
 p_2 q_1 &= 0 \\
 \beta_1 m_1 p_2 - \gamma_3 n_1 p_2 - \gamma_4 n_1 q_2 &= 0 \\
 \beta_1 m_1 q_2 - \beta_1 m_2 q_1 - \delta_3 n_1 p_2 - \delta_4 n_1 q_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen (4) geht hervor, daß entweder n_1 und p_2 oder n_1 und q_2 oder m_2 und p_2 oder m_2 und q_1 zugleich $= 0$ sein müssen. Die ersten 3 Fälle liefern, wie leicht ersichtlich ist, kein Resultat für die vorliegende Untersuchung, da sie keine Gerade bestimmen. Es kommt also nur der 4te Fall in Betracht, nämlich der, wo $m_2 = q_1 = 0$ ist. Nimmt man die für diesen Fall vereinfachten beiden letzten Gleichungen (4) hinzu, so lauten dieselben

$$\begin{aligned}
 \beta_1 m_1 p_2 - \gamma_3 n_1 p_2 - \gamma_4 n_1 q_2 &= 0 \\
 \beta_1 m_1 q_2 - \delta_3 n_1 p_2 - \delta_4 n_1 q_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Wird die erste mit q_2 , die zweite mit p_2 multipliziert, und dann subtrahiert, so ergibt sich:

$$\delta_3 p_2^2 - (\gamma_3 - \delta_4) p_2 q_2 - \gamma_4 q_2^2 = 0,$$

und daraus:

$$q_2 : p_2 = \frac{1}{2\gamma_4} \left\{ \delta_4 - \gamma_3 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3} \right\}.$$

Wird dieser Wert für $q_2 : p_2$ in die zweite Gleichung (5) eingesetzt, so findet man

$$m_1 : n_1 = \frac{1}{2\beta_1} \left\{ \gamma_3 + \delta_4 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3} \right\}.$$

Benutzt man diese Resultate für die Gleichungen (3), so erhält man als Gleichungen der einzigen Achsen, welche das System S haben kann, folgende:

$$\left. \begin{aligned}
 (\gamma_3 + \delta_4 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3}) \cdot x + 2\beta_1 \cdot y &= 0 \\
 2\gamma_4 \cdot z + (\delta_4 - \gamma_3 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3}) \cdot w &= 0
 \end{aligned} \right\}.$$

Diese beiden Gleichungspaare sind aber identisch mit den Gleichungen (A_1) und (A_2). A_1 und A_2 sind also die einzigen Achsen von S .

Durch jeden Punkt dieser Achsen gehen unendlich viele Strahlen von S ; denn für die Koordinaten von Punkten, die auf A_1 oder A_2 liegen, wird die resultierende Gleichung (1) zu einer identischen. Zur Bestimmung der durch einen Punkt der Achsen gehenden Strahlen von S bleibt somit nur eine Gleichung übrig, nämlich die erste oder zweite Gleichung (S) des Strahlensystems. Da dieselbe linear in y_0 z_0 w_0 ist, so liegen

die durch einen Punkt einer Achse gehenden Strahlen so, daß sie eine gerade Spur auf der Ebene $x = 0$ bilden, d. h. sie liegen in einer Ebene. Es ergibt sich somit der Satz: Die durch einen Punkt einer Achse gehenden Strahlen von S bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel.

Im Allgemeinen liegt, wie am Ende des § 1 bewiesen wurde, in jeder Ebene des Raumes ein einziger Strahl von S . Hat die Ebene die Gleichung $\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w = 0$, so sind die beiden Gleichungen, welche den in ihr liegenden Strahl bestimmen:

$$\eta \cdot y_0 + \zeta \cdot z_0 + \omega \cdot w_0 = 0$$

$$\beta_1 \xi \cdot y_0 + (\gamma_3 \zeta + \gamma_4 \omega) \cdot z_0 + (\delta_3 \zeta + \delta_4 \omega) \cdot w_0 = 0.$$

Ihre resultierende Gleichung ist:

$$(-\beta_1 \xi \zeta + \gamma_3 \eta \zeta + \gamma_4 \eta \omega) z_0 + (-\beta_1 \xi \omega + \delta_3 \eta \zeta + \delta_4 \eta \omega) w_0 = 0 \quad (6)$$

Wenn dieselbe identisch wird, so liegen in der Ebene mehr als ein Strahl, und zwar unendlich viele. Der Fall tritt ein, wenn gleichzeitig die Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \gamma_4 \eta \omega + \gamma_3 \eta \zeta - \beta_1 \xi \zeta &= 0 \\ \delta_4 \eta \omega + \delta_3 \eta \zeta - \beta_1 \xi \omega &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Genau dieselben Untersuchungen, die mit den Gleichungen (2) gemacht wurden, führen zu dem Resultate, daß die 4 Wertsysteme, welche beide Gleichungen (7) befriedigen, sind:

$$1) \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \zeta = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

$$3) \text{ und } 4) \begin{cases} \omega : \zeta = \frac{1}{2\gamma_4} \left\{ \delta_4 - \gamma_3 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3} \right\} \\ \xi : \eta = \frac{1}{2\beta_1} \left\{ \gamma_3 + \delta_4 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3} \right\} \end{cases}$$

Das erste System stellt in Ebenenkoordinaten die Tetraderkante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$, das zweite die Kante $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ dar. Die letzten beiden Systeme stellen je eine Gerade dar, welche die Punkte enthält, deren Koordinaten

$$\begin{aligned} &0, & 0, & \delta_4 - \gamma_3 \pm \sqrt{\dots}, & -2\gamma_4 \\ \text{und } &-2\beta_1, & \gamma_3 + \delta_4 \pm \sqrt{\dots}, & 0, & 0 \end{aligned}$$

sind. Diese beiden Punkte sind aber die Schnittpunkte der Achsen A_1 und A_2 mit den Tetraederkanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$; die beiden Geraden 3) und 4) sind also identisch mit den Achsen.

Bezeichnet man mit singulären Punkten des Systems S solche, in denen sich unendlich viele Strahlen schneiden, und mit singulären Ebenen solche, die unendlich viele Strahlen enthalten, so ergibt sich also das einfache Resultat: Die singulären Punkte liegen auf denselben Geraden, durch welche die singulären Ebenen gehen.

Speziell erhellt aus den letzten Betrachtungen, daß in jeder Ebene, welche eine der Achsen enthält, unendlich viele Strahlen von S liegen.

Dieselben bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel. Denn da für die Koordinaten jeder Ebene, welche eine der Achsen enthält, die resultierende Gleichung (6) identisch wird, so bleibt zur Bestimmung der in ihr liegenden Strahlen nur die Gleichung $\eta y_0 + \zeta z_0 + \omega w_0 = 0$ übrig; dieselbe ist linear in y_0, z_0, w_0 , beweist also, daß durch jeden Punkt der Schnittgeraden der Ebene mit der Ebene $x = 0$ nur ein Strahl von S geht, welcher in der Ebene liegt. Nun schneiden sich notwendig alle Strahlen der Ebene, und ebenso schneiden sie alle die Achsen A_1 und A_2 . Schneidet die Ebene die andere Achse, so gehen alle ihre Strahlen durch den Schnittpunkt, d. h. bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel. Liegt aber die andere Achse ebenfalls in der Ebene, so müssen sich ihre Strahlen ebenfalls in einem einzigen Punkte dieser Achse treffen. Denn treffen sie sich in mehreren, so ist jedes Mal durch einen solchen Treffpunkt ein Strahlenbüschel bestimmt, dessen Mittelpunkt derselbe ist. Es gehen dann also durch jeden Punkt des Schnittes der Ebene mit der Ebene $x = 0$ mehrere Strahlen, was unmöglich ist. Also auch in diesem Falle gilt der angegebene Satz.

Es traten neben den Gleichungen der beiden Achsen noch jedes Mal dieselben beiden Gleichungspaare auf, wenn es sich um die Bestimmung der singulären Punkte und der singulären Ebenen handelte.

Diese beiden Gleichungspaare stellten die Tetraederkante $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

und die Kante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ dar, welche beide Strahlen von S sind.

Beide spielen nur die Rolle von überflüssigen Faktoren. Denn in der That gehen weder durch jeden ihrer Punkte unendlich viele verschiedene Strahlen, noch liegen solche in jeder ihrer Ebenen. Das läßt sich leicht zeigen. Sucht man z. B. die Bedingung auf,

welche ein Strahl erfüllen muß, um die Kante $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ zu treffen,

so lautet dieselbe: $y_0 = 0$. Dem Werte $y_0 = 0$ entspricht aber

im Allgemeinen nur ein Strahl, nämlich die Kante $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Da hier der Wert des Verhältnisses $z_0 : w_0$ gar nicht vorkommt, so fallen in dieser Kante unendlich viele Strahlen des Systems S zusammen. Sucht man ferner die Bedingung auf, unter welcher ein Strahl die Kante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ schneidet, so ist diese:

$$\gamma_4 z_0^2 + (\delta_4 - \gamma_3) z_0 w_0 - \delta_3 w_0^2 = 0.$$

Daraus folgt:

$$z_0 : w_0 = \frac{1}{2\gamma_4} \left\{ \gamma_3 - \delta_4 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3} \right\}.$$

Dieser Gleichung genügen aber die Koordinaten des Schnittpunktes von A_1 bzw. A_2 mit der Ebene $x = 0$. Die Strahlen also, welche die Kante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ schneiden, liegen in Ebenen einer der Achsen und bilden also 2 Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die Schnittpunkte der Kante mit A_1 bzw. A_2 sind.

Ganz analoge Resultate ergeben sich, wenn man die Bedingungen aufsucht, unter welchen Ebenen, die die Kante $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ oder $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ enthalten, singulär sind.

Es bleiben also die beiden Achsen A_1 und A_2 als die einzigen Geraden übrig, deren sämtliche Punkte und Ebenen singulär sind, d. h. mehr als einen Strahl von S enthalten. Außer Punkten und Ebenen von A_1 und A_2 giebt es weiter keine singulären Punkte und Ebenen. Also: Jeder Punkt, in welchem 2 Strahlen von S sich schneiden, liegt auf einer Achse, und jede Verbindungsebene von 2 Strahlen enthält eine Achse.

In den Gleichungen (A_1) und (A_2) der beiden Achsen kommt eine Quadratwurzel vor, deren Radikand $(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3$ ist. Je nachdem dieser positiv, 0, oder negativ ist, sind 3 Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle sind beide Achsen reell; bildet man aus den 4 Gleichungen (A_1) und (A_2) die Determinante, so zeigt sich leicht, daß dieselbe nicht verschwindet. Die beiden Achsen sind also windschief. Im zweiten Falle werden beide Achsen identisch, im dritten werden sie imaginär. Diese Resultate lassen sich geometrisch so ausdrücken: Das Strahlensystem hat entweder 2 windschiefe Achsen oder eine oder keine Achse.

Diese 3 Fälle entsprechen genau den 3 Fällen, daß die Schnittgerade der beiden ebenen Systeme, nämlich die Gerade $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 2 reelle, zusammenfallende, oder imaginäre sich selbst zugeordnete Punkte hat. Die Bedingung nämlich, daß dem Punkte $(0 \ 0 \ z_0 \ w_0)$ derselbe Punkt $(0 \ 0 \ z_1 \ w_1)$ entspricht, ist die, daß $z_0 : w_0 = z_1 : w_1$ ist. Nennt man den Wert dieses Verhältnisses $\frac{\kappa}{\mu}$, so ergibt sich aus den Gleichungen (α') der Kollinearität

$$\begin{aligned} \kappa z_0 &= \gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0 & \text{oder} & & (\gamma_3 - \kappa) z_0 + \delta_3 w_0 &= 0 \\ \kappa w_0 &= \gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0 & & & \gamma_4 z_0 + (\delta_4 - \kappa) w_0 &= 0 \end{aligned}$$

Damit diese letzten beiden Gleichungen durch einen gemeinsamen Wert von $z_0 : w_0$ erfüllt seien, muß ihre Determinante verschwinden, d. h. es muß $\kappa^2 - (\gamma_3 + \delta_4)\kappa + \gamma_3\delta_4 - \gamma_4\delta_3 = 0$ sein. Diese Gleichung ergibt 2 Werte für κ , nämlich

$$\kappa = \frac{\gamma_3 + \delta_4}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3}.$$

Je nachdem $(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3$ positiv, Null, negativ ist, sind diese beiden Werte von κ reell und verschieden, reell und gleich, imaginär, d. h. hat die sich selbst entsprechende Schnittgerade der beiden kollinearen ebenen Systeme 2, einen, oder keinen sich selbst zugeordneten Punkt. Jeder dieser Punkte liegt auf einer Achse. Denn setzt man den obigen Wert von κ in die Gleichung $\gamma_4 z_0 + (\delta_4 - \kappa) w_0 = 0$ ein, welche den sich selbst zugeordneten Punkt bestimmt, so wird dieselbe

$$2\gamma_4 \cdot z_0 + (\delta_4 - \gamma_3 \pm \sqrt{(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3}) \cdot w_0 = 0,$$

gibt also den Schnitt der beiden Achsen A_1 und A_2 mit der Ebene $x = 0$ an, wie sofort erhellt, wenn man die Gleichungen der Achsen mit der letzten Gleichung zusammenhält.

Sind 2 reelle Achsen vorhanden, so ist gezeigt worden, daß jeder Strahl von S beide schneidet. Aber auch umgekehrt besteht der Satz: Jede Gerade, die beide Achsen schneidet, ist ein Strahl von S . Denn betrachtet man den Schnittpunkt einer beliebigen beide Achsen schneidenden Geraden mit einer von diesen, z. B. mit A_1 , so ist dieser Punkt Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, dessen sämtliche Individuen durch A_2 gehen müssen. Die Gerade gehört also notwendig zu dem Büschel, also auch zu dem Systeme S .

Sind daher die beiden Achsen von S gegeben, so kann man jeden beliebigen Strahl leicht konstruieren; durch Verbindung beliebiger Punkte von A_1 mit beliebigen von A_2 erhält man beliebige Strahlen von S . Das Strahlensystem ist mithin durch die beiden Achsen völlig bestimmt.

Daß jede Gerade, welche beide Achsen des Systems schneidet, ein Strahl desselben ist, läßt sich auch rein analytisch leicht beweisen, indem man zeigt, daß die Gleichungen einer beliebigen die beiden Achsen schneidenden Geraden durch geeignete Umformungen in die Gleichungen (S) übergeführt werden können. Die nähere Ausführung des Beweises soll hier unterbleiben.

§ 3.

Das Strahlensystem S wurde dadurch erzeugt, daß man einander zugeordnete Punkte der beiden kollinearen ebenen Systeme, die auf den Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ liegen, und in ihrer Schnittgeraden eine Gerade entsprechend gemein haben, miteinander verband. Umgekehrt erzeugt aber auch das Strahlensystem S durch den Schnitt seiner Strahlen mit den Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ zwei kollineare Systeme auf diesen Ebenen. Es soll nun in diesem Paragraphen untersucht werden, ob und in welchen Fällen auch auf 2 andern Ebenen durch das Strahlensystem S kollineare ebene Systeme hergestellt werden, bzw. in welche Beziehung 2 beliebige Ebenen des Raumes durch S gebracht werden.

Betrachte man zunächst den Strahl $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ und die beiden durch ihn gehenden Ebenen $z = 0$ und $w = 0$. Bezeichnet man die Schnittpunkte der Strahlen von S mit der ersten Ebene durch $(x' y' z' w')$, und die derselben Strahlen mit der zweiten Ebene durch $(x'' y'' z'' w'')$, so ergeben sich leicht die Relationen:

$$\begin{aligned} x' : y' : z' : w' &= \beta_1 y_0 z_0 : -\gamma_3 y_0 z_0 - \delta_3 y_0 w_0 : 0 \\ &: \gamma_4 z_0^2 + (\delta_4 - \gamma_3) z_0 w_0 - \delta_3 w_0^2 \\ x'' : y'' : z'' : w'' &= \beta_1 y_0 w_0 : -\gamma_4 y_0 z_0 - \delta_4 y_0 w_0 \\ &: -(\gamma_4 z_0^2 + (\delta_4 - \gamma_3) z_0 w_0 - \delta_3 w_0^2) : 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $y_0 z_0 w_0$, um direkt eine Beziehung zwischen $x' y' z' w'$ und $x'' y'' z'' w''$ zu erhalten, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}x'' &= -\frac{\gamma_3}{\delta_3} x' - \frac{\beta_1}{\delta_3} y' \\y'' &= \frac{\gamma_3 \delta_4 - \gamma_4 \delta_3}{\beta_1 \delta_3} x' + \frac{\delta_4}{\delta_3} y' \\z'' &= -w',\end{aligned}$$

zu welchen noch $z' = 0$ und $w'' = 0$ hinzutreten. Aus allen fünf kann das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x'' = -\frac{\gamma_3}{\delta_3} x' - \frac{\beta_1}{\delta_3} y' + \lambda_1 z' \\ y'' = \frac{\gamma_3 \delta_4 - \gamma_4 \delta_3}{\beta_1 \delta_3} x' + \frac{\delta_4}{\delta_3} y' + \lambda_2 z' \\ z'' = \lambda_3 z' - w' \\ w'' = \lambda_4 z' \end{cases} \quad (1)$$

gebildet werden, in welchem $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ beliebige Konstanten bedeuten. Vergleicht man das System (1) mit den Gleichungen (α) des § 1, so erkennt man sofort, daß die Punkte $(x'' y'' z'' w'')$ den Punkten $(x' y' z' w')$ kollinear zugeordnet sind, daß also das Strahlensystem S auf den beiden Ebenen $z = 0$ und $w = 0$ 2 kollineare ebene Systeme erzeugt.

Nun war die Tetraederkante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ aber in einen ganz beliebigen Strahl von S hineingelegt worden, und als Ebenen $z = 0$ und $w = 0$ waren 2 beliebige Ebenen gewählt worden, die diesen Strahl enthalten. Es gilt daher der eben bewiesene Satz nicht nur für den Strahl $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ und die beiden ihn enthaltenden Ebenen $z = 0$ und $w = 0$, sondern allgemein für jeden Strahl und 2 beliebige durch ihn gehende Ebenen. Es ergibt sich also: Das Strahlensystem S erzeugt auf 2 beliebigen durch irgend einen Strahl gehenden Ebenen 2 kollineare ebene Systeme.

Das Strahlensystem kann also nicht nur dadurch erzeugt werden, daß man die beiden Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ einander kollinear zuordnet, sondern es wird ebenso gut durch die kollineare Beziehung von irgend 2 Ebenen erzeugt, die durch einen beliebigen Strahl gelegt werden. Damit aber verlieren die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ ihre bisherige Ausnahmestellung, ebenso wie ihr Schnitt, der Strahl $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; d. h. alles, was von diesem Strahle und seinen beiden Ebenen ausgesagt werden kann, gilt mit gleichem Rechte von jedem andern Strahle von S .

Dem oben gefundenen Satze über die kollineare Beziehung von 2 Ebenen, die durch denselben Strahl gehen, läßt sich leicht ein zweiter anfügen, der mit jenem nach dem bekannten geometrischen Prinzip der Dualität oder Reziprozität zusammenhängt; er lautet: Projiziert man das Strahlensystem S aus 2 beliebigen Punkten irgend eines Strahles, so sind die beiden entstehenden Ebenenbündel kollinear.

Dieser Satz ist dann allgemein bewiesen, wenn er für den Strahl $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ abgeleitet ist. Für diesen aber genügt es, diejenigen beiden Punkte zu betrachten, die er mit den Tetraederflächen $z = 0$ und $w = 0$ gemein hat, da über die Lage dieser Flächen bei der Wahl des Koordinatentetraeders nichts bestimmt worden ist. Die beiden Punkte haben die Koordinaten $0\ 0\ z\ 0$ und $0\ 0\ 0\ w$. Die Gleichungen der beiden Ebenen, die ein beliebiger Strahl von S mit ihnen bestimmt, sind leicht aufzustellen; aus ihnen findet man, wenn $\xi'\ \eta'\ \zeta'\ \omega'$ die Koordinaten der ersten Ebene, $\xi''\ \eta''\ \zeta''\ \omega''$ die der zweiten Ebene sind, sofort die Relationen:

$$\begin{aligned} \xi' : \eta' : \zeta' : \omega' &= \gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0 : \beta_1 z_0 : -\beta_1 y_0 : 0 \\ \xi'' : \eta'' : \zeta'' : \omega'' &= \gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0 : \beta_1 w_0 : 0 : -\beta_1 y_0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus denselben $y_0\ z_0\ w_0$, so ergibt sich, wenn zugleich berücksichtigt wird, daß $\zeta'' = \omega' = 0$ ist:

$$\begin{cases} \xi'' = \frac{\delta_4}{\delta_3} \xi' + \frac{\gamma_4 \delta_3 - \gamma_3 \delta_4}{\beta_1 \delta_3} \eta' + \mu_1 \omega' \\ \eta'' = \frac{\beta_1}{\delta_3} \xi' - \frac{\gamma_3}{\delta_3} \eta' + \mu_2 \omega' \\ \zeta'' = \mu_3 \omega' \\ \omega'' = \zeta' + \mu_4 \omega', \end{cases} \quad (2)$$

wo $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4$ beliebige Konstante sind. Dieses System von Gleichungen zeigt, verglichen mit den Gleichungen (β) des § 1, sofort die Kollinearität der beiden Ebenenbündel, deren Träger die Punkte $(0\ 0\ z\ 0)$ und $(0\ 0\ 0\ w)$ sind.

Beiden Sätzen schließt sich noch ein dritter an über die Beziehung der ebenen Systeme und der Ebenenbündel zu einander. Man betrachte das ebene System, welches vom Strahlensystem S auf der Ebene $x = 0$ erzeugt wird, und das Ebenenbündel, durch welches S aus dem Punkte $(0\ 0\ 0\ w)$ projiziert wird. Sind $x'\ y'\ z'\ w'$ die Koordinaten des Schnittpunktes eines beliebigen Strahles von S mit der Ebene $x = 0$, und $\xi''\ \eta''\ \zeta''\ \omega''$ die Koordinaten der Ebene, welche derselbe Strahl mit dem Punkte $(0\ 0\ 0\ w)$ bestimmt, so gelten die Relationen:

$$\begin{aligned} x' : y' : z' : w' &= 0 : y_0 : z_0 : w_0 \\ \xi'' : \eta'' : \zeta'' : \omega'' &= \gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0 : \beta_1 z_0 : -\beta_1 y_0 : 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus ihnen $y_0 z_0 w_0$, so ergeben sich mit Rücksicht darauf, daß $x' = 0$ und $\omega'' = 0$ ist, die Gleichungen:

$$\begin{cases} \xi'' = \kappa_1 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' + \delta_3 w' \\ \eta'' = \kappa_2 x' + \beta_1 z' \\ \zeta'' = \kappa_3 x' - \beta_1 y' \\ \omega'' = \kappa_4 x' \end{cases} \quad (3)$$

Stellt man dieselben mit den Gleichungen (a) des § 1 zusammen, so erhellt sofort, daß das ebene System und das Ebenenbündel einander reziprok sind. Da aber der Punkt $(0 \ 0 \ 0 \ w)$ ein beliebiger Punkt und die Ebene $x = 0$ eine beliebige Ebene des beliebig gewählten Strahles $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ sind, so folgt der Satz: Das Strahlensystem bestimmt mit einer beliebigen Ebene irgend eines Strahles ein ebenes System, und mit einem beliebigen Punkte desselben Strahles ein Ebenenbündel, welches dem ebenen Systeme reziprok ist.

Die Ebenen, deren geometrische Verwandtschaft bisher untersucht wurde, schnitten sich in Strahlen des Systems S . Es soll jetzt untersucht werden, welche geometrische Verwandtschaft durch das Strahlensystem auf 2 beliebigen Ebenen hergestellt wird, die keinen Strahl von S gemein haben. Man betrachte die Ebenen $x = 0$ und $z = 0$; dieselben schneiden sich nicht in einem Strahle des Systems. Nimmt man auf letzterer eine beliebige Gerade an, so möge dieselbe die Gleichungen

$$\begin{cases} z = 0 \\ mx + ny + qw = 0 \end{cases} \quad (4)$$

haben. Werden zu diesen beiden Gleichungen die zwei Gleichungen (S) hinzugenommen, und wird aus den vier die Determinante gebildet, so ist dieselbe eine Funktion von $y_0 z_0 w_0$, und zwar, wie leicht zu ersehen, eine Funktion 2ten Grades. Setzt man die Determinante $= 0$, so erhält man dadurch die Bedingung, welcher die Bestimmungsstücke $y_0 z_0 w_0$ eines Strahles von S genügen müssen, damit derselbe die Gerade (4) schneide. Da aber die Bedingungsgleichung $y_0 z_0 w_0$ im 2ten Grade enthält, so folgt, daß sämtliche Strahlen, die die Gerade (4) treffen, auf der Ebene $x = 0$ einen Kegelschnitt herauschneiden. Nun liegt die Gerade (4) auf der Ebene $z = 0$; es ist also durch das Strahlensystem jeder Geraden auf $z = 0$ ein Kegelschnitt auf $x = 0$ zugeordnet. Da

aber die Ebenen $x = 0$ und $z = 0$ ganz beliebige Ebenen sind, so gilt dieser Satz ganz allgemein für irgend 2 Ebenen, die keinen Strahl von S gemein haben. Er besagt mit andern Worten, daß durch das Strahlensystem S auf 2 beliebigen Ebenen, die sich nicht in einem Strahle schneiden, eine geometrische Verwandtschaft 2ten Grades hergestellt wird.

Liegt auf der Ebene $x = 0$ eine Kurve n ter Ordnung, so hat dieselbe mit dem Kegelschnitt, der der Geraden (4) auf der Ebene $z = 0$ entspricht, $2n$ Punkte gemein. Durch jeden dieser Punkte geht im Allgemeinen ein einziger Strahl, und von den sämtlichen Strahlen, die durch die Punkte der Kurve gehen, sind es nur diese $2n$, welche die Gerade (4) auf der Ebene $z = 0$ treffen. Diese Gerade war ganz beliebig gewählt worden; es wird also die Regelfläche, welche aus allen die Kurve treffenden Strahlen von S gebildet wird, von einer beliebigen Geraden des Raumes in $2n$ Erzeugenden getroffen; diese letzte Zahl giebt aber den Grad der Regelfläche an. Es erfüllen also die sämtlichen Strahlen von S , welche eine ebene Kurve n ter Ordnung treffen, eine Regelfläche $2n$ ten Grades.

§ 4.

Da die Gerade eine Kurve 1ter Ordnung ist, so folgt aus dem letzten Satze des vorigen § unmittelbar, daß alle Strahlen des Systems S , welche eine beliebige Gerade des Raumes treffen, auf einer Regelfläche 2ten Grades liegen. Die Strahlen bilden also die eine Schar von Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids oder eines hyperbolischen Paraboloids. Die Regelfläche ist bestimmt, wenn 3 Strahlen gegeben sind. Nun läßt sich stets eine Gerade finden, welche alle 3 Strahlen schneidet, und alle Strahlen von S , welche diese Gerade treffen, bilden nach dem eben abgeleiteten Satze eine Regelfläche 2ten Grades, auf der auch die 3 gegebenen Strahlen liegen. Also ergibt sich: 3 Strahlen von S bestimmen eine Regelfläche 2ten Grades, deren übrige Erzeugenden ebenfalls Strahlen von S sind.

Der letzte Satz kann auch folgendermaßen direkt abgeleitet werden. Hat man drei beliebige Strahlen von S und nimmt der Einfachheit halber an, daß die ersten beiden mit den Tetraeder-

kanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ übereinstimmen, so hat der dritte die Gleichungen:

$$\begin{cases} (\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0) \cdot x + \beta_1 w_0 \cdot y - \beta_1 y_0 \cdot w = 0 \\ (\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0) \cdot x + \beta_1 z_0 \cdot y - \beta_1 y_0 \cdot z = 0. \end{cases} \quad (S)$$

In diesen Gleichungen (S) haben y_0, z_0, w_0 bestimmte konstante Werte. Die Regelfläche 2ten Grades, welche durch diese 3 Strahlen bestimmt wird, hat die leicht aufzufindende Gleichung:

$$\{(\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0)x + \beta_1 w_0 y\}z - \{(\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0)x + \beta_1 z_0 y\}w = 0 \quad (1)$$

Sie enthält 2 Regelscharen, nämlich

$$\begin{cases} \kappa z = (\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0)x + \beta_1 z_0 y \\ \kappa w = (\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0)x + \beta_1 w_0 y \end{cases}$$

und $\begin{cases} \lambda z = w \\ \lambda \{(\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0)x + \beta_1 z_0 y\} = (\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0)x + \beta_1 w_0 y. \end{cases}$

Zu der ersten gehören die 3 gegebenen Strahlen; sie entsprechen den Werten $\kappa = 0, \infty, \beta_1 y_0$. Multipliziert man die Gleichungen dieser Regelschar mit $\beta_1 y_0$ und die Gleichungen (S) eines beliebigen Strahles des Systems mit κ , so werden beide Gleichungspaare identisch; damit aber ist der Satz bewiesen.

Die Regelschar 2ten Grades ist ein Teil des Strahlensystems S. Sie wird durch 3 gegebene Strahlen eindeutig bestimmt. Es kann nun gefragt werden, welcher Teil des Systems durch 4 gegebene Strahlen bestimmt wird, bzw. ob durch 4 Strahlen das System S völlig bestimmt ist.

Sind 4 Gerade im Raume gegeben, von denen der Einfachheit wegen 2 so angenommen werden sollen, daß sie sich mit 2 Tetraederkanten decken, so sind ihre 4 Gleichungspaare:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} z = mx + ny \\ w = px + qy \end{cases} \\ 4) \begin{cases} z = m_1 x + n_1 y \\ w = p_1 x + q_1 y. \end{cases} \end{aligned}$$

Sollen diese 4 Geraden alle Strahlen eines Systems S sein, so müssen die Gleichungen 3) und 4) spezielle Fälle der allgemeinen Gleichungen (S) eines Strahlensystems sein. Diese Gleichungen (S) lauten, etwas umgeformt:

$$\begin{cases} z = \frac{\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0}{\beta_1 y_0} x + \frac{z_0}{y_0} y \\ w = \frac{\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0}{\beta_1 y_0} x + \frac{w_0}{y_0} y \end{cases} \quad (S')$$

In diesen Gleichungen sind y_0, z_0, w_0 Parameter, die jeden einzelnen Strahl des Systems bestimmen. Die Konstanten $\gamma_3, \delta_3, \gamma_4, \delta_4$ und β_1 haben für alle Strahlen eines Systems dieselben, für verschiedene Systeme aber verschiedene Werte. Kennt man daher die Werte dieser Konstanten oder wenigstens ihre Verhältnisse, so ist das Strahlensystem als solches völlig bekannt. Es läßt sich aber zeigen, daß die Verhältnisse der 5 Größen sich mit Ausnahme eines Falles vollständig bestimmen lassen, wenn die 4 obigen Geraden gegeben sind.

Die Gleichungen der dritten Geraden sind identisch mit den Gleichungen (S') , wenn $\frac{z_0}{y_0} = n, \frac{w_0}{y_0} = q$ und ferner

$$\frac{\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0}{\beta_1 y_0} = m, \quad \frac{\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0}{\beta_1 y_0} = p$$

gesetzt wird. Diese 4 Gleichungen ergeben 2 Relationen für die Konstanten $\gamma_3, \delta_3, \gamma_4, \delta_4, \beta_1$, nämlich:

$$\begin{aligned} n\gamma_3 + q\delta_3 &= m\beta_1 \\ n\gamma_4 + q\delta_4 &= p\beta_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Die Gleichungen der vierten Geraden sind identisch mit den Gleichungen (S') , wenn $\frac{z_0}{y_0} = n_1, \frac{w_0}{y_0} = q_1$ und ferner

$$\frac{\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0}{\beta_1 y_0} = m_1, \quad \frac{\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0}{\beta_1 y_0} = p_1$$

gesetzt wird. Diese 4 Gleichungen ergeben 2 weitere Relationen für $\gamma_3, \delta_3, \gamma_4, \delta_4, \beta_1$:

$$\begin{aligned} n_1\gamma_3 + q_1\delta_3 &= m_1\beta_1 \\ n_1\gamma_4 + q_1\delta_4 &= p_1\beta_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Man erhält also 4 lineare homogene Gleichungen, aus welchen die Verhältnisse von $\gamma_3, \delta_3, \gamma_4, \delta_4, \beta_1$ zu bestimmen sind, nämlich:

$$\begin{aligned} n\gamma_3 + q\delta_3 &= m\beta_1 \\ n_1\gamma_3 + q_1\delta_3 &= m_1\beta_1 \end{aligned} \quad (2^a)$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} n\gamma_4 + q\delta_4 &= p\beta_1 \\ n_1\gamma_4 + q_1\delta_4 &= p_1\beta_1 \end{aligned} \quad (3^a)$$

Es ergibt sich aus ihnen:

$$\begin{aligned} \gamma_3 : \delta_3 : \gamma_4 : \delta_4 : \beta_1 &= mq_1 - m_1q : nm_1 - n_1m \\ &: pq_1 - p_1q : np_1 - n_1p : nq_1 - n_1q. \end{aligned} \quad (4)$$

Setzt man diese Werte für die 5 Konstanten in die allgemeinen Gleichungen (S') eines Strahlensystems ein, so sind dieselben im Allgemeinen völlig bestimmt, d. h. mit andern Worten: Im All-

gemeinen ist ein Strahlensystem völlig bestimmt, wenn 4 seiner Strahlen gegeben sind.

Es sind aber noch einige spezielle Fälle der Lage zu untersuchen, in welcher sich die 4 gegebenen Strahlen zu einander befinden.

Durch die 3 ersten Strahlen

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} z = mx + ny \\ w = px + qy \end{cases}$$

ist eine Regelfläche bestimmt, deren Gleichung

$$F \equiv (px + qy)z - (mx + ny)w = 0$$

ist. Dieselbe enthält die Regelschar

$$\begin{cases} \kappa z = mx + ny \\ \kappa w = px + qy, \end{cases}$$

welcher die 3 Strahlen für die speziellen Werte $\kappa = 0, \infty, 1$ angehören. Es gehören also alle Individuen dieser Regelschar zu dem durch die 4 gegebenen Strahlen bestimmten Systeme S als Strahlen desselben. Sucht man die Schnittpunkte des 4ten gegebenen

Strahles $\begin{cases} z = m_1x + n_1y \\ w = p_1x + q_1y \end{cases}$ mit der Regelfläche $F = 0$ auf, so ergibt sich als resultierende Gleichung von $F = 0$ und den Gleichungen des Strahles:

$$\begin{aligned} (mp_1 - m_1p)x^2 + ((mq_1 - m_1q) + (np_1 - n_1p))xy \\ + (nq_1 - n_1q)y^2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Schnittpunkte werden also reell und verschieden, reell und gleich, oder imaginär sein, je nachdem die Diskriminante der letzten Gleichung positiv, Null oder negativ ist. Diese Diskriminante ist aber

$$D \equiv ((mq_1 - m_1q) + (np_1 - n_1p))^2 - 4(mp_1 - m_1p)(nq_1 - n_1q).$$

Aus § 2 ist bekannt, daß das Strahlensystem S zwei Achsen, eine oder keine hat, je nachdem der Ausdruck $(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3$ positiv, Null oder negativ ist. Drückt man aber $\gamma_3, \delta_3, \gamma_4, \delta_4$ durch $m, n, \dots$ gemäß (4) aus, so wird der Ausdruck $(\gamma_3 - \delta_4)^2 + 4\gamma_4\delta_3$ bis auf einen konstanten positiven Faktor gleich

$$((mq_1 - m_1q) - (np_1 - n_1p))^2 + 4(pq_1 - p_1q)(nm_1 - n_1m),$$

und dieser letzte Ausdruck ist, wie sich leicht zeigen läßt, mit der Diskriminante D identisch. Es ergibt sich daher der Satz: Je nachdem der vierte gegebene Strahl die durch die 3 ersten bestimmte Regelfläche schneidet, berührt, oder gar nicht trifft, hat das durch die 4 Strahlen

bestimmte System S 2 Achsen, eine, oder gar keine Achse.

Die sich aus (4) ergebenden Werte für die Verhältnisse $\gamma_3 : \delta_3 : \gamma_4 : \delta_4 : \beta_1$ werden unbestimmt, wenn gleichzeitig 2 der Ausdrücke, die rechts vom Gleichheitszeichen in (4) stehen, verschwinden. Es kommen aber hier nur die Fälle in Betracht, wo der erste und zweite, oder wo der dritte und vierte gleichzeitig verschwinden. Denn nur in diesen Fällen lassen sich aus den Gleichungen (2^a) und (3^a) die Quotienten $\frac{\gamma_3}{\beta_1}$ und $\frac{\delta_3}{\beta_1}$ bezw. $\frac{\gamma_4}{\beta_1}$ und $\frac{\delta_4}{\beta_1}$ nicht bestimmen.

Ist z. B. zugleich $mq_1 - m_1q = 0$ und $nm_1 - n_1m = 0$, so wird auch $nq_1 - n_1q = 0$, und die zweite Gleichung (5) des Strahlensystems ist ganz unbestimmt, da ihre sämtlichen Koeffizienten verschwinden. Man muß in diesem Falle das System S auf andere Weise zu bestimmen suchen. Die Gleichung (5) vereinfacht sich

für die speziellen Werte $\begin{matrix} mq_1 - m_1q = 0 \\ nq_1 - n_1q = 0 \end{matrix}$, indem das Glied mit

y^2 fortfällt, die linke Seite sich also in die beiden Faktoren x und $(mp_1 - m_1p)x + (np_1 - n_1p)y$ zerlegen läßt. Der vierte gegebene Strahl hat dann 2 verschiedene reelle Punkte mit der Regelfläche $F = 0$ gemein, er schneidet also 2 Strahlen des Systems S in 2 diskreten Punkten. Diese Punkte müssen in Achsen von S liegen, und zwar der eine auf der ersten, der andere auf der zweiten Achse. Denn lägen sie auf derselben, so wäre diese identisch mit

dem Strahle $\begin{cases} z = m_1x + n_1y \\ w = p_1x + q_1y \end{cases}$, könnte also nicht alle Strahlen

der Regelschar von $F = 0$ schneiden, was sie doch als Achse thun muß. Die beiden Achsen sind diejenigen Individuen der zweiten Regelschar auf $F = 0$, welche durch die beiden Schnittpunkte von $F = 0$ mit dem 4ten gegebenen Strahle gehen. Ihre Gleichungen lassen sich also leicht finden, und es ist deshalb nach dem letzten Satze des § 2 das System S völlig bestimmt.

Die beiden Punkte, die der 4te gegebene Strahl mit der Regelfläche $F = 0$ gemein hat, bestimmen nicht mehr 2 reelle Achsen und damit das System S , wenn sie in einen einzigen zusammenfallen. Dies geschieht nur dann, wenn außer $mq_1 - m_1q$ und $nq_1 - n_1q$ noch $np_1 - n_1p$ gleich Null wird. Dann verschwindet aber auch $mp_1 - m_1p$, und die resultierende Gleichung (5) wird zu einer identischen, d. h. der 4te gegebene Strahl liegt auf der Regelfläche $F = 0$. Er gehört in diesem Falle zu der Regelschar, welche durch die 3 ersten gegebenen Strahlen bestimmt ist. Denn

es ist $m : n : p : q = m_1 : n_1 : p_1 : q_1$; bezeichnet man den Wert von $\frac{m_1}{m}$ mit $\frac{1}{\kappa}$, so wird somit der 4te gegebene Strahl durch die

Gleichungen $\begin{cases} \kappa z = mx + ny \\ \kappa w = px + qy \end{cases}$ dargestellt, welche identisch mit

denen der Regelschar auf $F = 0$ sind. — Es ist also der Fall, wo die 4 gegebenen Strahlen derselben Regelschar angehören, der einzige, in welchem durch dieselben kein System bestimmt wird. Der oben gefundene Satz läßt sich daher genauer so aussprechen: Durch 4 Strahlen, die nicht derselben Regelschar angehören, ist ein Strahlensystem völlig bestimmt.

Hieran kann noch folgender Satz geknüpft werden, der keines Beweises mehr bedarf: Zum System S gehören sämtliche Gerade der Regelschar, die durch die 3 ersten gegebenen Strahlen bestimmt wird, sowie ferner sämtliche Gerade jeder Regelschar, die der vierte gegebene Strahl mit 2 Geraden der ersten Regelschar bestimmt.

Sind 3 Strahlen einer Regelschar gegeben, so lassen sich die andern durch eine lineare Konstruktion finden, d. h. durch eine Konstruktion, bei der nur Ebenen und gerade Linien zur Anwendung kommen. Denn legt man durch die 3 Strahlen 3 beliebige Gerade hindurch, so können, wie bekannt ist, sämtliche übrige Strahlen der Schar dadurch konstruiert werden, daß man Gerade zieht, welche die 3 eben konstruierten schneiden. Da nun das Strahlensystem S , wenn 4 Strahlen von ihm gegeben sind, in alle möglichen Regelscharen zerlegt werden kann, so gilt über die Konstruktion seiner Strahlen dasselbe wie über die einer Regelschar.

Eine andere lineare Konstruktion der Strahlen eines Systems 1. Ordnung und 1. Klasse, wenn 4 seiner Strahlen gegeben sind, ergibt sich leicht aus § 3, wenn einige einfache Sätze über Projektivität als bekannt vorausgesetzt werden. Auf 2 beliebigen Ebenen, die irgend einen Strahl enthalten, erzeugt nämlich das System S zwei kollineare ebene Systeme. Sind a, b, c, d die 4 gegebenen Strahlen, und legt man durch d 2 beliebige Ebenen E und E_1 und bezeichnet die Schnittpunkte von $a b c$ auf E mit $A B C$, auf E_1 mit $A_1 B_1 C_1$, so sind A und A_1 , B und B_1 , C und C_1 einander zugeordnet, und d ist die Gerade, welche die beiden ebenen Systeme E und E_1 entsprechend gemein haben. Verbindet man die $A B C$ und die $A_1 B_1 C_1$ untereinander, so schneiden die 3 Verbindungslinien d in den 3 Punkten $\alpha \beta \gamma$, bezw.

$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$. α ist dem α_1 , β dem β_1 , γ dem γ_1 zugeordnet. Durch diese 3 Punktepaare ist die projektivische Beziehung der Geraden d zu sich selbst völlig bestimmt, so daß zu jedem Punkte λ der entsprechende λ_1 gefunden werden kann. Hat man nunmehr einen beliebigen Punkt L auf E , so findet man den zugeordneten L_1 auf E_1 folgendermaßen: Man verbindet L mit A und B ; diese Verbindungslinien schneiden d in λ' und λ'' ; zu λ' und λ'' sucht man die entsprechenden Punkte auf d , nämlich λ'_1 und λ''_1 , und verbindet dieselben mit A_1 und B_1 ; der Schnitt der Verbindungslinien ist L_1 . Durch Verbindung von L und L_1 entsteht endlich der Strahl l des Systems.

§ 5.

Da alle Strahlen des Systems S durch die Achsen desselben gehen, so enthält notwendig eine jede Fläche 2ter Ordnung, auf der eine aus Strahlen von S bestehende Regelschar liegt, die beiden Achsen; denn jede Gerade, welche eine Fläche 2ter Ordnung in mehr als 2 Punkten schneidet, liegt vollständig in derselben.

Im vorigen § war gezeigt worden, daß die Bedingung, daß ein beliebiger Strahl von S die durch 3 beliebige andere bestimmte Regelfläche 2ter Ordnung in 2, einem oder keinem Punkte trifft, identisch ist mit der, daß das System 2, eine oder keine Achse besitzt. Es gilt also der Satz: Eine aus Strahlen von S bestehende Regelschar wird von einem nicht in ihr enthaltenen Strahle in 2, einem oder keinem Punkte getroffen, je nachdem das Strahlensystem 2 Achsen, eine oder gar keine Achse besitzt.

Zwei Flächen, welche je eine zum Systeme S gehörige Regelschar enthalten, haben nie eine eigentliche Kurve 4ter Ordnung miteinander gemein, da sich zwei Strahlen nur auf den Achsen des Systems schneiden können. Sind die Achsen reell, so sind sie beiden Flächen gemeinsam; außer ihnen können die Flächen noch höchstens 2 Strahlen gemein haben, da durch 3 schon eine Regelfläche eindeutig bestimmt ist.

§ 6.

Die Gleichungen eines Strahles des Systems S waren bisher (S) oder auch

$$\begin{cases} z = \frac{\gamma_3 z_0 + \delta_3 w_0}{\beta_1 y_0} x + \frac{z_0}{y_0} y \\ w = \frac{\gamma_4 z_0 + \delta_4 w_0}{\beta_1 y_0} x + \frac{w_0}{y_0} y \end{cases} \quad (S')$$

Da das System S vollkommen unabhängig ist von der Wahl desjenigen Strahles, durch welchen die beiden S erzeugenden ebenen Systeme gelegt werden (vergl. § 3), so soll jetzt auch in der Form der Gleichungen diese Unabhängigkeit zum Ausdruck gebracht werden, indem aus den Gleichungen (S') die Größen y_0, z_0, w_0 fortgeschafft werden, die sich auf die Ebene $x = 0$ beziehen. Es werde für (S') geschrieben:

$$\begin{cases} z = \lambda x + \lambda_1 y \\ w = \mu x + \mu_1 y \end{cases} \quad (1)$$

Hierbei bestehen zwischen $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1$ die beiden Relationen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\beta_1 \delta_4}{\gamma_3 \delta_4 - \gamma_4 \delta_3} \lambda - \frac{\beta_1 \delta_3}{\gamma_3 \delta_4 - \gamma_4 \delta_3} \mu = a\lambda + b\mu \\ \mu_1 &= -\frac{\beta_1 \gamma_4}{\gamma_3 \delta_4 - \gamma_4 \delta_3} \lambda + \frac{\beta_1 \gamma_3}{\gamma_3 \delta_4 - \gamma_4 \delta_3} \mu = a_1 \lambda + b_1 \mu \end{aligned} \quad (2)$$

a, b, a_1, b_1 sind Konstanten, durch welche das Strahlensystem als solches völlig bestimmt ist; die verschiedenen Werte von λ und μ bestimmen die einzelnen Strahlen von S .

Soll ein Strahl durch den Punkt $(x' y' z' w')$ gehen, so müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} z' &= \lambda (x' + ay') + \mu \cdot by' \\ w' &= \mu (x' + b_1 y') + \lambda \cdot a_1 y' \end{aligned} \quad (3)$$

Aus diesen lassen sich λ und μ eindeutig bestimmen. Der bei der Rechnung auftretende Nenner ergibt, $= 0$ gesetzt:

$$(x' + ay')(x' + b_1 y') - a_1 by'^2 = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung giebt umgeformt:

$$a_1 z'^2 + (b_1 - a) z'w' - bw'^2 = 0.$$

Die Gleichung $a_1 z'^2 + (b_1 - a) z'w' - bw'^2 = 0$ stellt 2 Ebenen dar, die sich mit den Ebenen $z = 0$ und $w = 0$ in derselben Geraden schneiden. Durch diese 4 Ebenen wird also auf sämtlichen Strahlen von S dasselbe anharmonische Verhältnis hergestellt. Dieses wird zu einem harmonischen, wenn $a = b_1$ ist. Man kann unbeschadet

der Allgemeinheit der Entwicklung annehmen, daß die Koordinatenebenen $z = 0$ und $w = 0$ von vornherein so gewählt sind, daß das Verhältnis harmonisch ist, d. h. man kann $a = b_1$ setzen. Dann werden die Gleichungen eines Strahles

$$\begin{cases} z = \lambda (x + ay) + \mu \cdot by \\ w = \mu (x + ay) + \lambda \cdot a_1 y \end{cases} \quad (5)$$

Ersetzt man noch, was erlaubt ist, die bisherige Koordinatenebene der x durch die Ebene $x' = x + ay = 0$ und läßt dann den Index fort, so werden, wenn man außerdem

$$\begin{array}{cccc} \lambda, & \mu, & b, & a_1 \\ \text{durch } \alpha\lambda, & \gamma\mu, & \frac{\beta}{\gamma}, & \frac{\delta}{\alpha} \end{array}$$

ersetzt, schließlich die Gleichungen eines beliebigen Strahles des Systems:

$$\begin{cases} z = \alpha\lambda x + \beta\mu y \\ w = \gamma\mu x + \delta\lambda y, \end{cases} \quad (S)$$

die fernerhin mit (S) bezeichnet werden sollen.

$\alpha \beta \gamma \delta$ charakterisieren das Strahlensystem als solches, λ und μ bestimmen die einzelnen Strahlen desselben.

Für $\begin{matrix} \lambda = \infty \\ \mu = \infty \end{matrix}$ und $\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{matrix}$ werden die Gleichungen (S) zu $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$.

Die Gleichung einer Regelfläche, welche durch die Strahlen

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (6), \quad \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (7)$$

und einen beliebigen dritten

$$\begin{cases} z = \alpha\lambda x + \beta\mu y \\ w = \gamma\mu x + \delta\lambda y \end{cases} \quad (8)$$

bestimmt wird, ist

$$\lambda (\alpha xw - \delta yz) - \mu (\gamma xz - \beta yw) = 0. \quad (9)$$

Die Polarebene eines beliebigen Punktes $P \equiv (x_0 y_0 z_0 w_0)$ in Bezug auf diese Fläche hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} & (\lambda\alpha w_0 - \mu\gamma z_0) x + (\mu\beta w_0 - \lambda\delta z_0) y - (\lambda\delta y_0 + \mu\gamma x_0) z \\ & + (\lambda\alpha x_0 + \mu\beta y_0) w = 0 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} & \lambda [\alpha w_0 x - \delta z_0 y - \delta y_0 z + \alpha x_0 w] \\ & - \mu [\gamma z_0 x - \beta w_0 y + \gamma x_0 z - \beta y_0 w] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Die Faktoren von λ und μ in der letzten Gleichung verschwinden gleichzeitig, wenn für $x y z w$ die Koordinaten des Punktes

$$P_1 = \left(\frac{\delta}{\gamma} y_0, \frac{\alpha}{\beta} x_0, \frac{\alpha}{\gamma} w_0, \frac{\delta}{\beta} z_0 \right)$$

eingesetzt werden. Nun heißt ein Punkt P einem andern P_1 konjugiert, wenn die Polarebene von P durch P_1 geht (und umgekehrt); ebenso heißt eine Ebene E einer andern E_1 konjugiert, wenn der Pol von E in E_1 liegt (und umgekehrt). Es ist also im vorliegenden Falle P_1 zu P konjugiert in Bezug auf alle Flächen 2ten Grades, welche durch die Strahlen (6) und (7) und einen beliebigen dritten bestimmt werden, da die Koordinaten von P_1 vollständig unabhängig von λ und μ sind.

Die Bedingungen dafür, daß ein Strahl von S durch P_1 geht, werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\gamma} w_0 &= \alpha\lambda \cdot \frac{\delta}{\gamma} y_0 + \beta\mu \cdot \frac{\alpha}{\beta} x_0 \\ \frac{\delta}{\beta} z_0 &= \gamma\mu \cdot \frac{\delta}{\gamma} y_0 + \delta\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} x_0 \end{aligned}$$

dargestellt. Dieselben geben umgeformt:

$$\begin{aligned} w_0 &= \gamma\mu x_0 + \delta\lambda y_0 \\ z_0 &= \alpha\lambda x_0 + \beta\mu y_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen aber stellen zugleich die Bedingungen dar, unter welchen ein Strahl durch P geht. Es liegen also P und P_1 auf demselben Strahle des Systems.

P_1 ist für alle die Strahlen (6) und (7) enthaltenden Regelscharen des Systems dem Punkte P konjugiert. Da aber (6) und (7) beliebige Strahlen sind, und durchaus keine Ausnahmestellung deswegen einnehmen, weil sie Tetraederkanten sind, so wird P_1 dem P auch für alle (6) und einen beliebigen andern Strahl s enthaltenden Regelflächen konjugiert sein. Dann aber kann man auch (6) durch einen beliebigen 5ten Strahl s' ersetzen, so daß allgemein der Satz besteht: Die Polaren des Punktes P in Bezug auf alle Regelflächen des Strahlensystems schneiden sich in einem Punkte P_1 , welcher auf demselben Strahle wie P liegt.

Sucht man in Bezug auf die Regelfläche (9) die Koordinaten des Poles einer beliebigen Ebene $E \equiv \xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + \omega_0 w = 0$, so findet man leicht:

$$\begin{aligned} x_0 : y_0 : z_0 : w_0 &= -\omega_0 \delta \lambda - \zeta_0 \beta \mu : \zeta_0 \alpha \lambda + \omega_0 \gamma \mu \\ &: \eta_0 \alpha \lambda - \xi_0 \beta \mu : -\xi_0 \delta \lambda + \eta_0 \gamma \mu. \end{aligned} \tag{11}$$

Dieser Punkt liegt in der Ebene:

$$E_1 \equiv \frac{\gamma}{\delta} \eta_0 x + \frac{\beta}{\alpha} \xi_0 y + \frac{\gamma}{\alpha} \omega_0 z + \frac{\beta}{\delta} \xi_0 w = 0.$$

Die Koordinaten dieser Ebene sind von λ und μ vollständig unabhängig. Die Ebene E_1 ist also der Ebene E konjugiert in Bezug auf alle Regelflächen, welche die Strahlen (6) und (7) und einen beliebigen dritten enthalten, also nach analogen Schlußfolgerungen wie oben, in Bezug auf alle Regelflächen des Systems.

In E_1 ist ein Strahl von S enthalten, wenn die Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \omega_0 \gamma \lambda + \xi_0 \frac{\beta \gamma}{\delta} \mu + \eta_0 \frac{\gamma}{\delta} &= 0 \\ \xi_0 \beta \lambda + \omega_0 \frac{\beta \gamma}{\alpha} \mu + \xi_0 \frac{\beta}{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden dadurch erhalten, daß die Werte für z und w aus den Gleichungen (S) in die Gleichung von E_1 eingesetzt, und die Koeffizienten von x und y einzeln gleich Null gesetzt werden. Sie lassen sich zu folgenden umformen:

$$\begin{aligned} \omega_0 \delta \lambda + \xi_0 \beta \mu + \eta_0 &= 0 \\ \xi_0 \alpha \lambda + \omega_0 \gamma \mu + \xi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Sie geben also die Bedingungen dafür, daß ein Strahl in E enthalten ist. E und E_1 enthalten also denselben Strahl von S , und es ergibt sich: Die Pole einer Ebene E in Bezug auf alle Regelflächen des Systems liegen in einer zweiten Ebene E_1 , welche den nämlichen Strahl wie E enthält.

Die Punkte und Ebenen des Raumes sind also einander paarweise konjugiert in Bezug auf alle Regelflächen des Systems.

§ 7.

Um die folgenden Untersuchungen zu vereinfachen, sollen hier zunächst die Gleichungen der Achsen des Strahlensystems in veränderter Form aufgestellt werden.

Dividiert man die erste der Gleichungen (S) des vorigen § durch $\sqrt{\alpha\beta}$, die zweite durch $\sqrt{\gamma\delta}$, und addiert, bzw. subtrahiert dann beide Gleichungen, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{z}{\sqrt{\alpha\beta}} + \frac{w}{\sqrt{\gamma\delta}} = (\sqrt{\alpha\delta}\lambda + \sqrt{\beta\gamma}\mu) \left(\frac{x}{\sqrt{\beta\delta}} + \frac{y}{\sqrt{\alpha\gamma}} \right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{\alpha\beta}} - \frac{w}{\sqrt{\gamma\delta}} = (\sqrt{\alpha\delta}\lambda - \sqrt{\beta\gamma}\mu) \left(\frac{x}{\sqrt{\beta\delta}} - \frac{y}{\sqrt{\alpha\gamma}} \right)$$

Die erste dieser Gleichungen wird befriedigt durch das System:

$$\begin{cases} \frac{z}{\sqrt{\alpha\beta}} + \frac{w}{\sqrt{\gamma\delta}} = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{\beta\delta}} + \frac{y}{\sqrt{\alpha\gamma}} = 0, \end{cases} \quad (A_1)$$

die zweite durch das System:

$$\begin{cases} \frac{z}{\sqrt{\alpha\beta}} - \frac{w}{\sqrt{\gamma\delta}} = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{\beta\delta}} - \frac{y}{\sqrt{\alpha\gamma}} = 0. \end{cases} \quad (A_2)$$

Die Gleichungen (A_1) und (A_2) enthalten weder λ noch μ , stellen also 2 gerade Linien dar, welche von allen Strahlen des Systems geschnitten werden; d. h. sie sind die Gleichungen der beiden Achsen von S .

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die beiden Achsen zusammenfallen, ist die, daß entweder α oder β oder γ oder δ gleich Null wird. Ist z. B. $\alpha = 0$, so entspricht einem beliebigen Punkte $P \equiv (x_0, y_0, z_0, w_0)$ nach § 6 der konjugierte Punkt

$$P_1 \equiv \left(\frac{\delta}{\gamma} y_0, 0, 0, \frac{\delta}{\beta} z_0 \right).$$

Da aber für $\alpha = 0$ die Gleichungen der einzigen Achse $\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ werden, so ist zu ersehen, daß P_1 auf dieser Achse liegt. Da sich das analoge Resultat für β oder γ oder $\delta = 0$ ergibt, so besteht der Satz: Hat das System S eine einzige Achse, so ist jedem Punkte des Raumes ein Punkt derselben konjugiert.

Sucht man umgekehrt (z. B. in dem Falle $\alpha = 0$) zu irgend einem Punkte $P \equiv (x_0, 0, 0, w_0)$ der einzigen Achse den konjugierten, so ist derselbe $P_1 \equiv (0, 0, 0, 0)$; er ist also unbestimmt. Er muß aber auf der Polare von P in Bezug auf irgend eine Regelfläche des Systems liegen. Die Gleichung einer solchen Polare wird aber nach dem vorigen §

$$\beta w_0 \cdot y - \gamma x_0 \cdot z = 0.$$

Diese Gleichung enthält weder λ noch μ . Die verschiedenen Polaren von P in Bezug auf die sämtlichen Regelflächen des Systems S

decken sich also, d. h. haben ∞ viele Punkte gemein, die alle dem Punkte P konjugiert sind. Die Polare geht, wie ihre Gleichung beweist, durch die Achse. Es sind also jedem Punkte der einzigen Achse sämtliche Punkte einer durch dieselbe gehenden Ebene konjugiert.

Ist keine der Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleich Null, so läßt sich zu jedem Punkte P der konjugierte P_1 , und zu jeder Ebene E die konjugierte E_1 eindeutig bestimmen.

Alle Punkte P bilden zusammen mit allen Ebenen E ein räumliches System, und alle Punkte P_1 zusammen mit allen Ebenen E_1 ein zweites räumliches System. Hat man eine beliebige Ebene

$$E \equiv \xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + \omega_0 w = 0$$

im ersten Raume, so ist dieser im zweiten Raume die Ebene

$$E_1 \equiv \frac{\gamma}{\delta} \eta_0 x + \frac{\beta}{\alpha} \xi_0 y + \frac{\gamma}{\alpha} \omega_0 z + \frac{\beta}{\delta} \zeta_0 w = 0$$

zugeordnet. Einem beliebigen Punkte $P \equiv (x y z w)$ aber entspricht der Punkt

$$P_1 \equiv \left(\frac{\delta}{\gamma} y, \frac{\alpha}{\beta} x, \frac{\alpha}{\gamma} w, \frac{\delta}{\beta} z \right).$$

Setzt man die Koordinaten dieses Punktes in die Gleichung $E_1 = 0$ ein, so erhält man

$$\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + \omega_0 w = 0;$$

d. h. P_1 liegt in E_1 , wenn P in E liegt. Oder: Bewegt sich ein Punkt P auf einer Ebene E , so bewegt sich sein konjugierter Punkt P_1 auf der konjugierten Ebene E_1 .

Die beiden räumlichen Systeme stehen also in kollinearer Beziehung zu einander. Nun entspricht aber nicht nur dem Punkte P des ersten Raumes der Punkt P_1 des zweiten, sondern auch umgekehrt entspricht dem Punkte P_1 , als zum ersten Raume gerechnet, der Punkt P , als zum zweiten Raume gerechnet (da P und P_1 einander wechselseitig konjugiert sind); dasselbe gilt für die Ebenen E und E_1 . Die beiden räumlichen Systeme bilden also ein einziges System, dessen Elemente involutorisch gepaart sind, d. h. ein involutorisches räumliches System.

Bewegt sich ein Punkt P auf einem Strahle des Systems S , so bewegt sich sein konjugierter Punkt, wie bewiesen, auf demselben Strahle; dreht sich eine Ebene E um einen Strahl, so dreht sich ihre konjugierte Ebene um denselben Strahl. Also: Jeder Strahl von S ist in dem involutorischen räumlichen System sich selbst zugeordnet; die auf ihm liegenden

Punkte und die durch ihn gehenden Ebenen sind involutorisch gepaart, da je 2 Punkte und je 2 Ebenen einander konjugiert sind.

In dem involutorischen räumlichen Systeme entspricht jeder beliebigen Geraden l des Raumes eine andere l_1 . Die den Punkten von l konjugierten Punkte liegen auf l_1 . Diese konjugierten Punkte müssen aber auf den durch die Punkte von l gehenden Strahlen liegen. Diese sämtlichen Strahlen bilden nach § 4 die eine Regelschar einer Fläche 2ter Ordnung. Zur andern Regelschar gehören also l und l_1 , und da sich 2 Individuen derselben Schar nie schneiden, so liegen l und l_1 notwendig windschief.

Setzt man in die linken Seiten der Gleichungen einer der beiden Achsen

$$\begin{cases} \frac{z}{\sqrt{\alpha\beta}} + \frac{w}{\sqrt{\gamma\delta}} = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{\beta\delta}} + \frac{y}{\sqrt{\alpha\gamma}} = 0 \end{cases} \quad (A_1) \text{ und } (A_2)$$

für die Koordinaten des Punktes $P \equiv (x \ y \ z \ w)$ die des konjugierten Punktes

$$P_1 \equiv \left(\frac{\delta}{\gamma} y, \frac{\alpha}{\beta} x, \frac{\alpha}{\gamma} w, \frac{\delta}{\beta} z \right)$$

ein, so erhält man nach einigen Umformungen wieder die linken Seiten der Gleichungen (A_1) und (A_2) bis auf konstante Faktoren, d. h. liegt ein Punkt auf einer der Achsen, so liegt der konjugierte Punkt auf derselben Achse. Es läßt sich aber auch zeigen, daß jeder Punkt einer Achse sich selbst konjugiert ist. Denn die Koordinaten eines Punktes einer Achse sind:

$$x : + \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}} x : z : + \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}} z.$$

Die Koordinaten des konjugierten sind infolgedessen

$$+ \frac{\delta}{\gamma} \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}} x : \frac{\alpha}{\beta} x : + \frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}} z : \frac{\delta}{\beta} z,$$

oder:

$$x : + \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}} x : z : + \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}} z.$$

Beide Punkte sind also identisch. Ebenso wie die Strahlen des Systems S sind daher auch die Achsen desselben in dem involutorischen räumlichen Systeme sich selbst zugeordnet. Strahlen und Achsen haben daher mit den ihnen entsprechenden Geraden alle

Punkte gemein; sonst aber hat, wie oben gezeigt wurde, keine Gerade mit der ihr entsprechenden einen Punkt gemein. Also: Keine Gerade des Raumes außer den Strahlen und Achsen von S hat mit ihrer entsprechenden einen Punkt gemein.

Hat das Strahlensystem 2 Achsen, so liegen dieselben nach § 5 auf sämtlichen Regelflächen des Systems. Ein jeder Strahl schneidet also eine Regelfläche, auf welcher er nicht liegt, in 2 diskreten Punkten, die den beiden Achsen angehören. Nimmt man einen beliebigen Punkt P auf dem Strahle an, so ist bekannt, daß die Polare desselben in Bezug auf die Regelfläche jede durch P gehende Gerade, also auch den Strahl in einem Punkte schneidet, welcher zu P und den beiden Schnittpunkten des Strahles mit der Fläche harmonisch liegt. Dieser Punkt ist aber der P konjugierte Punkt. Es trennen also die beiden Punkte, die irgend ein Strahl mit den Achsen gemein hat, je 2 konjugierte Punkte auf ihm harmonisch.

Betrachtet man ferner in dem Falle, daß S 2 Achsen besitzt, irgend 2 konjugierte Ebenen E und E_1 eines Strahles und die beiden Ebenen, die der Strahl mit den Achsen bestimmt, so liegen diese 4 Ebenen harmonisch, d. h. schneiden eine beliebige Gerade in 4 harmonischen Punkten. Denn irgend ein Strahl von S schneidet E und E_1 in konjugierten Punkten, da alle Punkte auf E solchen auf E_1 , und alle Punkte eines Strahles solchen desselben Strahles konjugiert sind. Der Strahl hat ferner mit der dritten und vierten Ebene Punkte gemein, welche auf den beiden Achsen liegen. Die 4 Punkte sind also, wie eben bewiesen wurde, harmonisch gelegen; mithin auch die 4 Ebenen. Es gilt daher der Satz: Hat das Strahlensystem 2 Achsen, so trennen dieselben je 2 konjugierte Punkte und Ebenen harmonisch von einander.

§ 8.

Sind 4 beliebige Gerade im Raume gegeben, so bestimmen dieselben nach § 4 ein Strahlensystem S . Die Gleichungen desselben sind nach § 6, (5), wenn 2 beliebige Strahlen zu Tetraederkanten

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ gemacht werden, folgende:

$$\begin{cases} z = \lambda x + (a\lambda + b\mu)y \\ w = \mu x + (a_1\lambda + b_1\mu)y, \end{cases} \quad (1)$$

wo a, b, a_1, b_1 Konstanten des Systems sind, während λ und μ jeden einzelnen Strahl bestimmen.

Es sei nun eine beliebige fünfte Gerade gegeben, die die Gleichungen hat

$$\begin{cases} z = mx + ny \\ w = px + qy, \end{cases} \quad (2)$$

und es sollen die Gleichungen aller der Strahlensysteme aufgesucht werden, welche die Gerade (2) mit irgend 3 Strahlen von S bestimmt. Da die Tetraederkanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ ganz beliebige Strahlen von S sind, so genügt es für unsern Zweck, die Gleichungen des Strahlensystems aufzustellen, welchem zugleich diese beiden Kanten, ein beliebiger Strahl (1) von S und (2) angehören. Diese Gleichungen seien:

$$\begin{cases} z = \lambda' x + (a'\lambda' + b'\mu')y \\ w = \mu' x + (a'_1\lambda' + b'_1\mu')y. \end{cases} \quad (3)$$

Es sind also die Konstanten a', b', a'_1, b'_1 zu bestimmen.

Dem System (3) sollen die Strahlen (1) und (2) angehören. Diese Bedingung ergibt die Relationen:

$$\begin{array}{l|l} a'\lambda + b'\mu = a\lambda + b\mu & a'm + b'p = n \\ a'_1\lambda + b'_1\mu = a_1\lambda + b_1\mu & a'_1m + b'_1p = q \end{array}$$

oder, anders angeordnet:

$$\begin{array}{l|l} \lambda a' + \mu b' = a\lambda + b\mu & \lambda a'_1 + \mu b'_1 = a_1\lambda + b_1\mu \\ ma' + pb' = n & ma'_1 + pb'_1 = q \end{array}$$

Bezeichnet man den Ausdruck $\lambda p - \mu m$ mit Δ , so erhält man aus den letzten 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta a' &= (a\lambda + b\mu)p - \mu n, & \Delta a'_1 &= (a_1\lambda + b_1\mu)p - \mu q \\ \Delta b' &= \lambda n - (a\lambda + b\mu)m, & \Delta b'_1 &= \lambda q - (a_1\lambda + b_1\mu)m \end{aligned}$$

Damit sind die Konstanten a', b', a'_1, b'_1 durch λ, μ und m, n, p, q ausgedrückt. Setzt man ihre Werte in die Gleichungen (3) ein, so erhält man:

$$\begin{cases} z = \lambda' x + \frac{1}{\Delta} \left[\{(a\lambda + b\mu)p - \mu n\} \lambda' + \{\lambda n - (a\lambda + b\mu)m\} \mu' \right] y \\ w = \mu' x + \frac{1}{\Delta} \left[\{(a_1\lambda + b_1\mu)p - \mu q\} \lambda' + \{\lambda q - (a_1\lambda + b_1\mu)m\} \mu' \right] y \end{cases}$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen die Parameter λ' und μ' durch

$\Delta\lambda'$ und $\Delta\mu'$, giebt Δ seinen Wert $\lambda p - \mu m$ und ordnet innerhalb der Koeffizienten von x und y nach den Parametern $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$, so werden die Gleichungen (3) schließlich zu

$$\begin{cases} z = (p\lambda\lambda' - m\lambda'\mu)x + [a p\lambda\lambda' + (b p - n)\lambda'\mu + (n - a m)\lambda\mu' - b m\mu\mu']y \\ w = (p\lambda\mu' - m\mu\mu')x + [a_1 p\lambda\lambda' + (b_1 p - q)\lambda'\mu + (q - a_1 m)\lambda\mu' - b_1 m\mu\mu']y \end{cases} \quad (4)$$

Dies sind also die Gleichungen eines Strahlensystems, welches 3 beliebige Strahlen von S und die Gerade (2) enthält, d. h. die Gleichungen aller Strahlensysteme, welche durch (2) und irgend 3 Strahlen von S bestimmt werden. Die Gesamtheit dieser Strahlensysteme nennt man einen Strahlenkomplex. Die Gleichungen (4) definieren mithin einen gewissen Strahlenkomplex C .

Setzt man

$$\begin{aligned} p\lambda\lambda' - m\lambda'\mu &= \varrho, & a p\lambda\lambda' + (b p - n)\lambda'\mu + (n - a m)\lambda\mu' - b m\mu\mu' &= \sigma \\ p\lambda\mu' - m\mu\mu' &= \varrho_1, & a_1 p\lambda\lambda' + (b_1 p - q)\lambda'\mu + (q - a_1 m)\lambda\mu' - b_1 m\mu\mu' &= \sigma_1, \end{aligned}$$

so besteht, wie sich leicht zeigen läßt, zwischen $\varrho, \varrho_1, \sigma, \sigma_1$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\{a_1 n - a q + (a b_1 - a_1 b) p\} \varrho + \{q - a_1 m - b_1 p\} \sigma \\ &+ \{b_1 n - b q - (a b_1 - a_1 b) m\} \varrho_1 - \{n - a m - b p\} \sigma_1 = 0. \end{aligned}$$

Die Konstanten dieser Gleichung sind bekannt; sie sollen mit A, B, C, D bezeichnet werden.

Die Gleichungen eines jeden Strahles des Komplexes C sind also

$$\begin{cases} z = \varrho x + \sigma y \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y, \end{cases} \quad (5)$$

wobei noch zwischen $\varrho, \sigma, \varrho_1, \sigma_1$ die Gleichung besteht:

$$A\varrho + B\sigma + C\varrho_1 + D\sigma_1 = 0. \quad (C)$$

Der Komplex enthält also eine dreifach unendliche Schar von Strahlen.

Aus den bisherigen Entwicklungen geht hervor, daß ein Strahlenkomplex von der Art des Komplexes C im Allgemeinen durch 5 gegebene Strahlen bestimmt ist. Die 5 Strahlen bestimmen hingegen keinen Komplex C , wenn die Gleichung (C) unbestimmt wird. Dieser Fall tritt dann ein, wenn sowohl A als B und C und D gleichzeitig verschwinden. Es ist dann aber gleichzeitig

$$\begin{aligned} a_1 n - a q + (a b_1 - a_1 b) p &= 0 \\ b_1 n - b q - (a b_1 - a_1 b) m &= 0 \\ q - a_1 m - b_1 p &= 0 \\ n - a m - b p &= 0. \end{aligned}$$

Aus der dritten und vierten dieser Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} n &= a m + b p \\ q &= a_1 m + b_1 p. \end{aligned} \quad (6)$$

Setzt man diese Werte für n und q in die ersten beiden Gleichungen ein, so werden dieselben zu identischen; die Gleichungen (6) sind also die einzigen Beziehungen, die zwischen m, n, p, q bestehen müssen, wenn die fünf gegebenen Strahlen keinen Komplex bestimmen sollen.

Setzt man in (1), den Gleichungen des durch die 4 ersten gegebenen Strahlen bestimmten Systems S , für die Parameter λ und μ die Werte m und p , so werden dieselben:

$$\begin{cases} z = mx + (am + bp) y \\ w = px + (a_1 m + b_1 p) y. \end{cases}$$

Setzt man ferner in den Gleichungen (2) des fünften gegebenen Strahles für n und q ihre Werte aus (6), so werden dieselben

$$\begin{cases} z = mx + (am + bp) y \\ w = px + (a_1 m + b_1 p) y. \end{cases}$$

Also gehört im vorliegenden Falle der fünfte gegebene Strahl zum System S . Es ergibt sich daher: Durch 5 gegebene Strahlen ist ein Komplex C bestimmt, wenn nicht alle 5 demselben Strahlensysteme angehören und nicht 4 von ihnen in derselben Regelschar liegen.

Um diejenigen Strahlen von C zu bestimmen, welche durch einen beliebigen Punkt $(x_0 y_0 z_0 w_0)$ gehen, setzt man die Koordinaten des Punktes in die Gleichungen (5) ein:

$$\begin{aligned} z_0 &= \varrho x_0 + \sigma y_0 \\ w_0 &= \varrho_1 x_0 + \sigma_1 y_0. \end{aligned}$$

Nimmt man dazu noch die Gleichung (C), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-x_0 \varrho + z_0}{y_0} \\ \varrho_1 &= \frac{(Bx_0 - Ay_0) \varrho - (Bz_0 + Dw_0)}{Cy_0 - Dx_0} \\ \sigma_1 &= \frac{(Ax_0 y_0 - Bx_0^2) \varrho + (Bx_0 z_0 + Cy_0 w_0)}{y_0 (Cy_0 - Dx_0)} \end{aligned}$$

Diese Werte für $\sigma, \varrho_1, \sigma_1$ gestalten die Gleichungen (5) zu folgenden:

$$\begin{aligned} y_0 z &= (xy_0 - x_0 y) \varrho + z_0 y \\ y_0 (Cy_0 - Dx_0) w &= (Bx_0 - Ay_0) (xy_0 - x_0 y) \varrho - (By_0 z_0 + Dy_0 w_0) x \\ &\quad + (Bx_0 z_0 + Cy_0 w_0) y. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus letzteren Gleichungen ϱ , so erhält man leicht:

$$(Bz_0 + Dw_0)x - (Az_0 + Cw_0)y + (Ay_0 - Bx_0)z + (Cy_0 - Dx_0)w = 0. \quad (7)$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, welcher alle durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0 w_0)$ gehenden Strahlen des Komplexes C angehören müssen. Sie ist völlig bestimmt, wenn $x_0 y_0 z_0 w_0$ gegeben ist. Es bilden also die durch einen Punkt des Raumes gehenden Strahlen von C einen gewöhnlichen Strahlenbüschel.

Soll ein Strahl von C in einer gewissen Ebene

$$\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + \omega_0 w = 0$$

liegen, so muß die Gleichung, die durch Einsetzung der Werte von z und w aus (5) in die Gleichung der Ebene entsteht, identisch werden, d. h. es muß sein:

$$\xi_0 + \zeta_0 \varrho + \omega_0 \varrho_1 = 0$$

$$\eta_0 + \zeta_0 \sigma + \omega_0 \sigma_1 = 0.$$

Dazu kommt noch

$$A\varrho + B\sigma + C\varrho_1 + D\sigma_1 = 0.$$

Aus den 3 Gleichungen folgt:

$$\sigma = \frac{(C\zeta_0 - A\omega_0)\varrho + (C\xi_0 + D\eta_0)}{B\omega_0 - D\zeta_0}$$

$$\varrho_1 = -\frac{\zeta_0 \varrho + \xi_0}{\omega_0}$$

$$\sigma_1 = \frac{\zeta_0 (A\omega_0 - C\zeta_0) - (C\xi_0 \zeta_0 + B\eta_0 \omega_0)}{\omega_0 (B\omega_0 - D\zeta_0)}.$$

Diese Werte für σ , ϱ_1 , σ_1 machen die Gleichungen (5) zu folgenden:

$$(B\omega_0 - D\zeta_0)z = \left\{ (B\omega_0 - D\zeta_0)x + (C\zeta_0 - A\omega_0)y \right\} \varrho + (C\xi_0 + D\eta_0)y$$

$$\omega (B\omega_0 - D\zeta_0)w = -\zeta_0 \left\{ (B\omega_0 - D\zeta_0)x + (C\zeta_0 - A\omega_0)y \right\} \varrho - \xi_0 (B\omega_0 - D\zeta_0)x - (C\xi_0 \zeta_0 + B\eta_0 \omega_0)y.$$

Diese Gleichungen stellen für einen beliebigen Wert von ϱ eine in der Ebene $\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + \omega_0 w = 0$ liegende Gerade dar. Sie werden befriedigt, wenn man setzt:

$$x : y : z : w = (A\omega_0 - C\zeta_0) : (B\omega_0 - D\zeta_0) : (C\xi_0 + D\eta_0) : -(A\xi_0 + B\eta_0). \quad (8)$$

Die Koordinaten dieses Punktes sind von ϱ ganz unabhängig; der Punkt ist also der gemeinsame Schnittpunkt aller auf der Ebene

liegenden Strahlen. Das heißt: Alle in einer Ebene des Raumes liegenden Strahlen von C bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel.

Die beiden letzten Sätze lassen sich zu folgendem zusammenfassen: Der Strahlenkomplex C ist ein linearer Komplex *).

Der lineare Komplex wird, wie gezeigt wurde, im Allgemeinen durch 5 Strahlen bestimmt. Liegen die 4 ersten so, daß sich eine Gerade u konstruieren läßt, welche alle 4 schneidet, so ist dieselbe eine Achse des durch die 4 Strahlen bestimmten Systems S . Der fünfte gegebene Strahl wird im Allgemeinen so liegen, daß er diese Achse u nicht trifft, und es werden nur spezielle Fälle sein, in welchen er sie schneidet. Es sollen diese speziellen Fälle jetzt betrachtet werden.

Die Tetraederkanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ waren Strahlen von C ; u soll beide schneiden. Es kann das Koordinatensystem so gewählt werden, daß die Kante $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ und die Gerade u zusammenfallen. Durch die 4 ersten Strahlen war das System S bestimmt, dessen Gleichungen

$$\begin{cases} z = \lambda x + (a\lambda + b\mu) y \\ w = \mu x + (a_1\lambda + b_1\mu) y \end{cases}$$

sind. Für den dritten Strahl mag $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, für den vierten $\lambda = \lambda_2$, $\mu = \mu_2$ sein. Da beide Strahlen die Kante $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ schneiden, so muß sein:

$$\begin{aligned} a\lambda_1 + b\mu_1 &= 0 \\ a\lambda_2 + b\mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Da aber $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ im Allgemeinen nicht gleich Null ist, so sind diese Gleichungen nur dann erfüllt, wenn $a = 0$ und $b = 0$ ist.

Da der fünfte Strahl $\begin{cases} z = mx + ny \\ w = px + qy \end{cases}$ ebenfalls durch die Kante

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ gehen soll, so muß $n = 0$ sein. Dadurch wird die

Gleichung (C) einfach zu $\sigma = 0$. Benutzt man sie zur Umformung der Gleichungen (5), so werden dieselben:

*) Der Ausdruck „linearer Komplex“ rührt von PLÜCKER her; seine „Neue Geometrie des Raumes“ ist in den folgenden Untersuchungen verschiedentlich benutzt worden.

$$\begin{cases} z = \varrho x \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y, \end{cases}$$

und es herrscht keine Relation mehr zwischen ϱ , ϱ_1 , σ_1 .

Die Form der ersten dieser Gleichungen zeigt, daß alle Strahlen des Komplexes die Gerade u schneiden, und die der zweiten, daß in jeder u enthaltenden Ebene eine zweifach unendliche Schar von Strahlen liegt. Also: Schneiden die 5 gegebenen Strahlen eine Gerade u , so besteht der Komplex aus allen Strahlen, welche u schneiden.

Dieser Fall soll in den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen werden.

§ 9.

Sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes P im Raume $x_0 y_0 z_0 w_0$, und $\xi_1 \eta_1 \zeta_1 \omega_1$ die Koordinaten derjenigen Ebene E_1 , welche die durch P gehenden Strahlen des Komplexes C enthält, so bestehen nach Gleichung (7) des vorigen § die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \kappa \xi_1 &= Bz_0 + Dw_0 \\ \kappa \eta_1 &= -Az_0 - Cw_0 \\ \kappa \zeta_1 &= Ay_0 - Bx_0 \\ \kappa \omega_1 &= Cy_0 - Dx_0, \end{aligned}$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\begin{cases} \kappa \xi_1 = & . & . & Bz_0 + Dw_0 \\ \kappa \eta_1 = & . & . & -Az_0 - Cw_0 \\ \kappa \zeta_1 = -Bx_0 + Ay_0 & . & . & \\ \kappa \omega_1 = -Dx_0 + Cy_0 & . & . & \end{cases} \quad (1)$$

Sind andererseits die Koordinaten einer beliebigen Ebene E im Raume $\xi_0 \eta_0 \zeta_0 \omega_0$, und $x_1 y_1 z_1 w_1$ die Koordinaten desjenigen Punktes P_1 , in welchem sich die in E liegenden Strahlen des Komplexes C schneiden, so bestehen nach Gleichung (8) des vorigen § die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mu x_1 &= A\omega_0 - C\zeta_0 \\ \mu y_1 &= B\omega_0 - D\zeta_0 \\ \mu z_1 &= C\xi_0 + D\eta_0 \\ \mu w_1 &= -A\xi_0 - B\eta_0, \end{aligned}$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\begin{cases} \lambda \xi_0 = & . & . & - Bz_1 - Dw_1 \\ \lambda \eta_0 = & . & . & + Az_1 + Cw_1 \\ \lambda \zeta_0 = & + Bx_1 - Ay_1 & . & . \\ \lambda \omega_0 = & + Dx_1 - Cy_1 & . & . \end{cases} \quad (2)$$

Die beiden Gleichungssysteme (1) und (2) beweisen, wenn sie mit den Gleichungen (a) und (b) des § 1 verglichen werden, daß das räumliche System, welches aus allen Punkten P und Ebenen E besteht, reziprok ist dem räumlichen Systeme der Punkte P_1 und Ebenen E_1 . Beide Räume sind in der Weise reziprok auf einander bezogen, daß einem jeden Punkte des einen im andern die Ebene seiner Komplexstrahlen, und jeder Ebene des ersten im zweiten der Punkt ihrer Komplexstrahlen zugeordnet ist. Die beiden reziproken räumlichen Systeme liegen involutorisch. Denn dem Punkt

$$P \equiv (x_0 \ y_0 \ z_0 \ w_0)$$

entspricht im zweiten Raume die Ebene

$$E_1 \equiv (Bz_0 + Dw_0, -Az_0 - Cw_0, Ay_0 - Bx_0, Cy_0 - Dx_0).$$

Wird diese Ebene zum ersten Raume gerechnet, so entspricht ihr im zweiten der Punkt

$$\begin{aligned} P' &\equiv ((BC - AD)x_0, (BC - AD)y_0, (BC - AD)z_0, (BC - AD)w_0) \\ &\equiv (x_0, y_0, z_0, w_0) \equiv P. \end{aligned}$$

Beide Punkte fallen also in einen zusammen.

Die beiden Systeme bilden daher ein einziges involutorisches reziprokes räumliches System, in welchem jeder Punkt auf der zugeordneten Ebene liegt, und jede Ebene durch den zugeordneten Punkt geht. Ein solches System heißt ein Nullsystem.

In dem Nullsystem als einem reziproken Doppelsystem ist jeder Geraden eine andere zugeordnet, indem nämlich alle Ebenen, welche den Punkten der ersten Geraden zugeordnet sind, durch die zweite Gerade gehen. Da außerdem jede Ebene den ihr entsprechenden Punkt enthält, so liegt der Ebenenbüschel der zweiten Geraden perspektivisch zu der Punktreihe der ersten Geraden (und umgekehrt).

Sind die Gleichungen einer beliebigen Geraden des Raumes

$$\begin{cases} z = \varrho x + \sigma y \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y, \end{cases} \quad (3)$$

so lassen sich leicht die Gleichungen der zugeordneten Geraden finden. Die Gerade (3) enthält die beiden Punkte $(x_0, 0, \varrho x, \varrho_1 x)$ und $(0, y, \sigma y, \sigma_1 y)$. Die diesen zugeordneten Ebenen sind

$$(B \varrho + D \varrho_1) x - (A \varrho + C \varrho_1) y - B z - D w = 0$$

$$(B \sigma + D \sigma_1) x - (A \sigma + C \sigma_1) y + A z + C w = 0.$$

Das System dieser 2 Gleichungen stellt die (3) zugeordnete Gerade des Nullsystems dar. Dasselbe läßt sich auf die Form bringen:

$$\begin{cases} \Delta z = \left\{ B (C \varrho + D \sigma) + D (C \varrho_1 + D \sigma_1) \right\} x - \left\{ B (A \varrho + B \sigma) + D (A \varrho_1 + B \sigma_1) \right\} y \\ \Delta w = - \left\{ A (C \varrho + D \sigma) + C (C \varrho_1 + D \sigma_1) \right\} x + \left\{ A (A \varrho + B \sigma) + C (A \varrho_1 + B \sigma_1) \right\} y, \end{cases} \quad (4)$$

wobei $\Delta = BC - AD$ ist.

Die Gerade (3) fällt mit der zugeordneten (4) zusammen, wenn die mit Δ multiplizierten Koeffizienten der Gleichungen (3) mit den entsprechenden von (4) identisch werden, d. h. wenn folgende Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\begin{aligned} B (C \varrho + D \sigma) + D (C \varrho_1 + D \sigma_1) &= (BC - AD) \varrho \\ - B (A \varrho + B \sigma) - D (A \varrho_1 + B \sigma_1) &= (BC - AD) \sigma \\ - A (C \varrho + D \sigma) - C (C \varrho_1 + D \sigma_1) &= (BC - AD) \varrho_1 \\ A (A \varrho + B \sigma) + C (A \varrho_1 + B \sigma_1) &= (BC - AD) \sigma_1. \end{aligned}$$

Diese 4 Gleichungen sind mit einander identisch; sie ergeben daher eine einzige Bedingung, die von den Koeffizienten $\varrho \sigma \varrho_1 \sigma_1$ zu erfüllen ist, nämlich

$$A \varrho + B \sigma + C \varrho_1 + D \sigma_1 = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung (C) des vorigen §, welche die Strahlen des Komplexes C bestimmt. Es ergibt sich daher: Alle sich selbst zugeordneten Geraden des Nullsystems sind Strahlen von C , und umgekehrt sind alle Strahlen von C in dem Nullsystem, das durch C bestimmt wird, sich selbst zugeordnet.

Wie also das Nullsystem durch den linearen Komplex C bestimmt wurde, so läßt sich umgekehrt auch der Komplex C bestimmen, wenn das Nullsystem gegeben ist.

Es entsteht die Frage: Wann schneidet die Gerade (3) die ihr zugeordnete (4)? Man findet durch Subtraktion der mit Δ multiplizierten Gleichungen (3) von den entsprechenden (4) leicht die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, nämlich:

$$A \varrho + B \sigma + C \varrho_1 + D \sigma_1 = 0.$$

Eine Gerade schneidet also nur dann die ihr zugeordnete, wenn sie Strahl des Komplexes C ist; in diesem Falle aber fällt sie, wie eben gesehen wurde, gänzlich mit ihr zusammen. —

Jede Gerade, welche 2 einander zugeordnete Gerade des Nullsystems zugleich schneidet, ist ein

Strahl des linearen Komplexes C . Dies ist geometrisch sofort evident. Denn nimmt man einen beliebigen Punkt auf der Geraden g , so geht die diesem Punkte zugeordnete Ebene des Nullsystems durch den Punkt und die Gerade g' , welche g zugeordnet ist. Diese Ebene enthält aber alle Strahlen von C , welche durch den Punkt gehen; d. h. jede Gerade durch den Punkt auf g und einen beliebigen auf g' ist Strahl des Komplexes C .

Analytisch läßt sich der Satz folgendermaßen ableiten. Durch jeden Punkt einer Geraden gehen unendlich viele Strahlen des Komplexes C . In 2 von ihnen, die zu einander windschief liegen, kann man die Tetraederkanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ legen, und durch die Gerade die Koordinatenebene $z = 0$ gehen lassen. Das kommt aber auf dasselbe hinaus, als wenn man von vornherein eine beliebige Gerade in der Ebene $z = 0$ betrachtet, welche durch die Kante $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hindurchgeht. Kann man für diese den Satz beweisen, daß alle Geraden, welche sie selbst und die ihr zugeordnete Gerade schneiden, zu C gehören, so wird er allgemein für je 2 einander zugeordnete Gerade bewiesen sein.

Die Gleichungen der Geraden sind:

$$\begin{cases} z = 0 \\ \lambda x - y = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Die der zugeordneten Geraden findet man leicht:

$$\begin{cases} Dx - Cy = 0 \\ (A\lambda - B)z + (C\lambda - D)w = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Die Bedingung dafür, daß eine Gerade

$$\begin{cases} z = \varrho x + \sigma y \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases} \quad (7)$$

die Gerade (5) schneidet, ist $\lambda\sigma + \varrho = 0$, die Bedingung dafür, daß (7) die Gerade (6) schneidet, ist

$$D\sigma(A\lambda - B) + D\sigma_1(C\lambda - D) + C\varrho(A\lambda - B) + C\varrho_1(C\lambda - D) = 0.$$

Diese beiden Bedingungen ergeben nach Elimination von λ die eine:

$$A\varrho + B\sigma + C\varrho_1 + D\sigma_1 = 0,$$

d. h. die Gerade (7) ist Strahl von C . Durch die 3 Strahlen des Komplexes $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = \varrho x + \sigma y \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases}$, wo noch die Gleichung $A\varrho + B\sigma + C\varrho_1 + D\sigma_1 = 0$ zu berücksichtigen ist, wird eine Regelfläche bestimmt, deren Gleichung ist:

$$z (\varrho_1 x + \sigma_1 y) - w (\varrho x + \sigma y) = 0.$$

Dieselbe enthält die beiden Regelscharen

$$\begin{cases} \kappa z = \varrho x + \sigma y \\ \kappa w = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases} \text{ und } \begin{cases} \lambda z = w \\ \lambda (\varrho x + \sigma y) = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases}$$

Zur ersten Schar, den Werten $x = 0, \infty, 1$ entsprechend, gehören die 3 gegebenen Strahlen. Die andern Individuen dieser Schar sind ebenfalls Strahlen des Komplexes, da ihre Konstanten $\frac{\varrho}{\kappa}, \frac{\sigma}{\kappa}, \frac{\varrho_1}{\kappa}, \frac{\sigma_1}{\kappa}$ die Gleichung $A\varrho + B\sigma + C\varrho_1 + D\sigma_1 = 0$ befriedigen.

Zu einer beliebigen Geraden der zweiten Schar läßt sich leicht die zugeordnete finden; dieselbe hat die Gleichungen:

$$\begin{cases} [A(\lambda\varrho - \varrho_1) + B(\lambda\sigma - \sigma_1)] z + [C(\lambda\varrho - \varrho_1) + D(\lambda\sigma - \sigma_1)] w = 0 \\ (B + \lambda D) x - (A + \lambda C) y = 0 \end{cases}$$

Setzt man

$$\lambda_1 = - \frac{(\lambda\varrho - \varrho_1) A + (\lambda\sigma - \sigma_1) B}{(\lambda\varrho - \varrho_1) C + (\lambda\sigma - \sigma_1) D},$$

so zeigt sich, daß die Gleichungen der zugeordneten Geraden die Form haben:

$$\begin{cases} \lambda_1 z = w \\ \lambda_1 (\varrho x + \sigma y) = \varrho_1 x + \sigma_1 y. \end{cases}$$

Die zugeordnete Gerade einer beliebigen Geraden der zweiten Regelschar gehört also ebenfalls dieser Regelschar an.

Nun sind die 3 Strahlen, welche die Regelfläche bestimmten, ganz beliebige Strahlen des Komplexes; hat man also ein Paar einander zugeordneter Geraden des Nullsystems (welche, wie gezeigt wurde, windschief liegen) und eine dritte keine von beiden schneidende Gerade g , und nimmt irgend 3 windschiefe Gerade, welche die 3 ersten zugleich schneiden, also Strahlen des Komplexes sind, so wird für diese Strahlen dasselbe gelten, was eben für die Strahlen

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} z = \varrho x + \sigma y \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases} \text{ bewiesen worden ist:}$$

Die sämtlichen Erzeugenden der einen Regelschar der Fläche 2ten Grades, welche durch die 3 Strahlen bestimmt wird, sind Strahlen des Komplexes C , die sämtlichen Erzeugenden der andern Regelschar sind einander paarweise zugeordnet, so daß also unter anderm nicht nur das gegebene Paar zugeordneter Geraden und die Gerade g auf der Fläche 2ten Grades liegen, sondern auch die g zugeordnete Gerade.

Diese Resultate findet man natürlich nur dann, wenn g nicht eine von den beiden gegebenen einander zugeordneten Geraden

schneidet. Schneidet sie nämlich eine, so läßt sich keine Regelfläche bestimmen, welche g und die beiden Geraden als Erzeugende derselben Schar enthält. In diesem Falle schneidet die g zugeordnete Gerade g' die andern der beiden Geraden, da dem Schnittpunkte von g und der einen Geraden eine Ebene entspricht, welche notwendig g' und die andere Gerade enthalten muß.

Es ergibt sich also schließlich der Satz: 2 Paar zugeordneter Geraden des Nullsystems liegen, wenn sie sich nicht wechselweise schneiden, allemal in einer Regelschar, deren Strahlen paarweise einander zugeordnet sind, und deren Leitschar aus Strahlen von C besteht.

§ 10.

Ein linearer Strahlenkomplex wird, wie gezeigt worden ist, im Allgemeinen durch 5 seiner Strahlen eindeutig bestimmt. Der Komplex bestimmt aber das zu ihm gehörende Nullsystem, in welchem die 5 Strahlen sich selbst zugeordnete Gerade sind. Es ist daher durch 5 sich selbst zugeordnete Gerade ein Nullsystem bestimmt.

Das Nullsystem läßt sich aber auch noch auf andere Weise bestimmen.

Sind zuerst 2 Paare einander zugeordneter Geraden gegeben, nämlich g und g' , γ und γ' , die in einer Regelschar liegen, so kann man 3 beliebige ihrer Leitstrahlen auswählen und die ersten beiden zu Tetraederkanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ machen; der dritte habe die Gleichungen $\begin{cases} z = \varrho x + \sigma y \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y. \end{cases}$ Dann gehören die Geraden g, g', γ, γ' sämtlich der Regelschar

$$\begin{cases} (\lambda z = w \\ \lambda (\varrho x + \sigma y) = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases}$$

an (§ 9). Sind die Werte des Parameters λ für die 4 Geraden bzw. $\lambda_1, \lambda'_1, \lambda_2, \lambda'_2$, so müssen, da zu der Geraden

$$\begin{cases} \lambda z = w \\ \lambda (\varrho x + \sigma y) = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases}$$

die zugeordnete

$$\begin{cases} [A(\lambda\varrho - \varrho_1) + B(\lambda\sigma - \sigma_1)]z + [C(\lambda\varrho - \varrho_1) + D(\lambda\sigma - \sigma_1)]w = 0 \\ (B + \lambda D)x - (A + \lambda C)y = 0 \end{cases}$$

gehört, die 4 Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} -\frac{A(\lambda_1 \varrho - \varrho_1) + B(\lambda_1 \sigma - \sigma_1)}{C(\lambda_1 \varrho - \varrho_1) + D(\lambda_1 \sigma - \sigma_1)} &= \lambda'_1, & -\frac{\lambda'_1 \varrho - \varrho_1}{\lambda'_1 \sigma - \sigma_1} &= \frac{B + \lambda_1 D}{A + \lambda_1 C} \\ -\frac{A(\lambda_2 \varrho - \varrho_1) + B(\lambda_2 \sigma - \sigma_1)}{C(\lambda_2 \varrho - \varrho_1) + D(\lambda_2 \sigma - \sigma_1)} &= \lambda'_2, & -\frac{\lambda'_2 \varrho - \varrho_1}{\lambda'_2 \sigma - \sigma_1} &= \frac{B + \lambda_2 D}{A + \lambda_2 C} \end{aligned}$$

Schafft man in der ersten und zweiten dieser 4 Gleichungen die Nenner fort, so erhält man:

$$\begin{aligned} A\varrho\lambda_1 - A\varrho_1 + B\sigma\lambda_1 - B\sigma_1 + C\varrho\lambda_1\lambda'_1 - C\varrho_1\lambda'_1 + D\sigma\lambda_1\lambda'_1 - D\sigma_1\lambda'_1 &= 0 \\ A\varrho\lambda'_1 - A\varrho_1 + B\sigma\lambda'_1 - B\sigma_1 + C\varrho\lambda_1\lambda'_1 - C\varrho_1\lambda_1 + D\sigma\lambda_1\lambda'_1 - D\sigma_1\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Subtrahiert man beide Gleichungen und läßt den überflüssigen Faktor $(\lambda_1 - \lambda'_1)$, der auftritt, weg, so folgt:

$$A\varrho + B\sigma + C\varrho_1 + D\sigma_1 = 0.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wie leicht zu zeigen ist, wenn man in der dritten und vierten Gleichung die Nenner fortschafft und dann subtrahiert. Die 4 Gleichungen sind also nicht unabhängig von einander, man kann daher nur 3 von ihnen benutzen, um A, B, C, D zu bestimmen. Thut man dies, so erhält man, da die Gleichungen linear und homogen in A, B, C, D sind, die Verhältnisse $A : B : C : D$ eindeutig bestimmt. Durch diese Verhältnisse ist aber, wie die Gleichungen (1) und (2) des vorigen § beweisen, das Nullsystem fixiert. Also: Zwei Paare einander zugeordneter Geraden, die in einer Regelschar liegen, bestimmen ein Nullsystem.

Hat man ein Paar zugeordneter Geraden und eine sie nicht schneidende sich selbst zugeordnete Gerade, so kann man letztere zur Kante $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ machen und die Kante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ so legen, daß sie die beiden einander zugeordneten Geraden trifft. Sind dann

$$(g) \begin{cases} z = \varrho x + \sigma y \\ w = \varrho_1 x + \sigma_1 y \end{cases} \text{ und } (g') \begin{cases} z = \varrho' x + \sigma' y \\ w = \varrho'_1 x + \sigma'_1 y \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Geraden, so muß, da sie die Kante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ schneiden sollen, $\varrho\sigma_1 - \varrho_1\sigma = 0$ und $\varrho'\sigma'_1 - \varrho'_1\sigma' = 0$ sein.

Nun bestehen zwischen den Konstanten von g und denen von g' gewisse Relationen, die sich aus den Gleichungen (4) des vorigen § ergeben. Dieselben sind:

$$\begin{aligned} B(C\varrho + D\sigma) + D(C\varrho_1 + D\sigma_1) &= (BC - AD)\varrho', & -B(A\varrho + B\sigma) - D(A\varrho_1 + B\sigma_1) &= (BC - AD)\sigma' \\ -A(C\varrho + D\sigma) - C(C\varrho_1 + D\sigma_1) &= (BC - AD)\varrho'_1, & A(A\varrho + B\sigma) + C(A\varrho_1 + B\sigma_1) &= (BC - AD)\sigma'_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned} 1) \quad C\rho + D\sigma &= +(C\rho' + D\rho'_1) & 3) \quad A\rho + B\sigma &= -(C\sigma' + D\sigma'_1) \\ 2) \quad C\rho_1 + D\sigma_1 &= -(A\rho' + B\rho'_1) & 4) \quad A\rho_1 + B\sigma_1 &= +(A\sigma' + B\sigma'_1) \end{aligned}$$

oder:

$$1^a) \quad D = \frac{\rho - \rho'}{\rho'_1 - \sigma} C \qquad 4^a) \quad B = \frac{\rho_1 - \sigma'}{\sigma'_1 - \sigma_1} A$$

folglich

$$\begin{aligned} 2^a) \quad \frac{\rho_1\rho'_1 - \rho_1\sigma + \rho\sigma_1 - \rho'\sigma'_1}{\rho'_1 - \sigma} C &= - \frac{\rho'\sigma'_1 - \rho'\sigma_1 + \rho_1\rho'_1 - \rho'_1\sigma'}{\sigma'_1 - \sigma_1} A \\ 3^a) \quad \frac{\rho'_1\sigma' - \sigma\sigma' + \rho\sigma'_1 - \rho'\sigma'_1}{\rho'_1 - \sigma} C &= - \frac{\rho\sigma'_1 - \rho\sigma_1 + \rho_1\sigma - \sigma\sigma'}{\sigma'_1 - \sigma_1} A \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß $\rho\sigma_1 - \rho_1\sigma = 0$ und $\rho'\sigma'_1 - \rho'_1\sigma' = 0$ ist, so werden die letzten beiden Gleichungen 2^a) und 3^a) mit einander identisch, nämlich

$$\frac{C}{\rho'_1 - \sigma} = - \frac{A}{\sigma'_1 - \sigma_1}$$

Man erhält also schließlich:

$$A : B : C : D = \sigma'_1 - \sigma_1 : \rho_1 - \sigma' : \sigma - \rho'_1 : \rho' - \rho.$$

Es sind mithin die Konstanten, welche das Nullsystem bestimmen, eindeutig fixiert. Schneiden die beiden zugeordneten Geraden g und g' die sich selbst zugeordnete Gerade $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, so müssen einige ihrer Konstanten ∞ werden, so z. B. $\sigma, \sigma_1, \sigma', \sigma'_1$ alle gleich ∞ . In diesem Falle erhält man keine bestimmten Werte für die Verhältnisse $A : B : C : D$. A, B, C, D werden auch dann unbestimmt, wenn gleichzeitig $\rho' = \rho, \sigma' = \rho_1, \rho'_1 = \sigma, \sigma'_1 = \sigma_1$ ist. Dann ist aber aus der Gleichung 2) oder aus 3) leicht zu ersehen, daß die Beziehung besteht:

$$A\rho + B\sigma + C\rho_1 + D\sigma_1 = 0.$$

Also ist die Gerade g in diesem Falle eine sich selbst zugeordnete Gerade, was sie nicht sein sollte. Es folgt somit: Ein Paar einander zugeordneter Geraden und eine sie nicht schneidende sich selbst zugeordnete Gerade bestimmen ein Nullsystem.

Schließlich mag noch angeführt werden, daß ein Nullsystem auch durch eine Raumkurve 3ten Grades bestimmt wird. Der Beweis dieser Thatsache soll hier nicht gegeben werden; er findet sich übrigens vollständig geliefert in SALMON's „Geometrie des Raumes“, Teil 2.

§ 11.

In § 9 ist gezeigt worden, daß ein linearer Strahlenkomplex ein Nullsystem bestimmt; es ist aber in demselben § auch bewiesen worden, daß umgekehrt durch ein Nullsystem der zugehörige Komplex völlig bestimmt ist. Doch war in den Entwicklungen des § 9 eine spezielle Lage des Koordinaten-Tetraeders zu Grunde gelegt, nämlich die, wo 2 Strahlen des Komplexes, d. h. 2 sich selbst zugeordnete Gerade des Nullsystems in die Kanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ hineinfließen. Es sollen jetzt aber für eine ganz beliebige Lage des Koordinaten-Tetraeders die Formeln aufgesucht werden, durch welche die dem Nullsystem eigentümliche Beziehung zwischen Punkten und Ebenen des Raumes dargestellt wird.

Das Nullsystem ist definiert als ein involutorisches reziprokes räumliches Doppelsystem, in welchem jeder Punkt auf der zugeordneten Ebene liegt und jede Ebene durch den zugeordneten Punkt geht. Sind $x' y' z' w'$ die Koordinaten eines Punktes, so muß gemäß den allgemeinen Gleichungen der Reziprozität (s. § 1)

$$\begin{cases} \mu\xi = a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1w' \\ \mu\eta = a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2w' \\ \mu\zeta = a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3w' \\ \mu\omega = a_4x' + b_4y' + c_4z' + d_4w' \end{cases} \quad (a)$$

die dem Punkte zugeordnete Ebene die Gleichung haben:

$$(a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1w')x + (a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2w')y + (a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3w')z + (a_4x' + b_4y' + c_4z' + d_4w')w = 0 \quad (1)$$

Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$(a_1x + a_2y + a_3z + a_4w)x' + (b_1x + b_2y + b_3z + b_4w)y' + (c_1x + c_2y + c_3z + c_4w)z' + (d_1x + d_2y + d_3z + d_4w)w' = 0 \quad (2)$$

In dieser Form stellt sie die dem Punkte $(x y z w)$ des ersten Raumes zugeordnete Ebene des zweiten Raumes dar, denn neben den Gleichungen (a) der Reziprozität bestehen noch die Gleichungen

$$\begin{cases} v\xi' = a_1x + a_2y + a_3z + a_4w \\ v\eta' = b_1x + b_2y + b_3z + b_4w \\ v\zeta' = c_1x + c_2y + c_3z + c_4w \\ v\omega' = d_1x + d_2y + d_3z + d_4w. \end{cases} \quad (b)$$

Die Gleichungen (1) und (2) stellen die reziproke Beziehung der beiden Räume vollständig dar. Da sich aber (2) aus (1) ableiten läßt, so genügt allein die erste Gleichung, um die reziproke Beziehung zu bestimmen.

Soll jeder Punkt in der ihm zugeordneten Ebene liegen, so muß die Gleichung (1) eine identische werden, wenn man für $(x\ y\ z\ w)$ das Wertsystem $(x'\ y'\ z'\ w')$ setzt, d. h. es muß $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 0$, und außerdem $b_1 = -a_2$, $c_1 = -a_3$, $d_1 = -a_4$, $c_2 = -b_3$, $d_2 = -b_4$, $d_3 = -c_4$ sein. Dadurch wird die Gleichung (1):

$$(-a_2 y' - a_3 z' - a_4 w') x + (a_2 x' - b_3 z' - b_4 w') y + (a_3 x' + b_3 y' - c_4 w') z + (a_4 x' + b_4 y' + c_4 z') w = 0,$$

oder, wenn man für

$$\begin{array}{cccccc} & -a_2, & a_3, & a_4, & -b_3, & b_4, & c_4 \\ \text{substituiert:} & a, & b, & c, & d, & e, & f: \end{array}$$

$$(ay' - bz' - cw') x + (-ax' + dz' - ew') y + (bx' - dy' - fw') z + (cx' + ey' + fz') w = 0. \quad (N)$$

Dafür kann man auch schreiben, indem man nach den Größen $x'\ y'\ z'\ w'$ ordnet:

$$(ay - bz - cw) x' + (-ax + dz - ew) y' + (bx - dy - fw) z' + (cx + ey + fz) w' = 0.$$

Man sieht also, daß sich die Gleichung (N) durch Vertauschung der gestrichenen mit den ungestrichenen Größen nicht ändert. Damit ist aber ausgesprochen, daß einem bestimmten Punkte dieselbe Ebene zugeordnet ist, ob er nun zum ersten oder zum zweiten räumlichen Systeme gerechnet wird; d. h. durch die Gleichung (N) ist ein involutorisches Doppelsystem bestimmt. Dasselbe ist reziprok, und ferner liegt jeder Punkt auf der zugeordneten Ebene, so wie jede Ebene den zugeordneten Punkt enthält. Die Gleichung (N) stellt also ein beliebiges Nullsystem vollständig dar. Sie giebt die Beziehung an zwischen einem beliebigen Punkte und seiner zugeordneten Ebene (der Nullebene), bzw. zwischen einer beliebigen Ebene und ihrem zugeordneten Punkte (dem Nullpunkt).

Aus der Gleichung (N) des Nullsystems lassen sich leicht die Gleichungen der Strahlen des zugehörigen linearen Komplexes finden. Die Strahlen desselben sind alle dadurch bestimmt, daß sie in den Nullebenen von beliebigen ihrer Punkte liegen müssen (dies ist dieselbe Bedingung wie die, daß sie in dem Nullsysteme sich selber zugeordnete Gerade sind; denn liegt eine Gerade in der Nullebene

eines ihrer Punkte, so muß sie, da die Nullebene durch die zugeordnete Gerade geht, mit dieser einen Punkt gemein haben; dann fällt sie aber nach § 9 mit ihr zusammen).

Sind die Gleichungen einer beliebigen Geraden

$$\begin{cases} x = \varrho z + \sigma w \\ y = \varrho_1 z + \sigma_1 w, \end{cases} \quad (3)$$

und soll die Gerade durch einen bestimmten Punkt $(x' y' z' w')$ gehen, so muß sein:

$$\begin{aligned} x - x' &= \varrho (z - z') + \sigma (w - w') \\ y - y' &= \varrho_1 (z - z') + \sigma_1 (w - w'). \end{aligned}$$

Drückt man vermittelst der letzten beiden Gleichungen x und y als Funktionen von z und w aus und setzt die gefundenen Werte in die Gleichung (N) ein, so muß dieselbe eine identische werden, wenn die Gerade (3) in der Nullebene des Punktes $(x' y' z' w')$ liegen soll. Die entstehende Gleichung ist:

$$\begin{aligned} &\varrho (ay' - bz' - cw') \left| \cdot z \right. + \sigma (ay' - bz' - cw') \left| \cdot w \right. + (ay' - bz' - cw') x' - \varrho z' (ay' - bz' - cw') \\ &+ \varrho_1 (-ax' + dz' - ew') \left| + \right. + \sigma_1 (-ax' + dz' - ew') \left| + (-ax' + dz' - ew') y' - \sigma w' (ay' - bz' - cw') \right. \\ &+ (bx' - dy' - fw') \left| + \right. + (cx' + ey' + fz') \left| - \varrho_1 z' (-ax' + dz' - ew') \right. \\ &\quad \left. - \sigma_1 w' (-ax' + dz' - ew') \right. \equiv 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Es müssen also die Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \varrho (ay' - bz' - cw') + \varrho_1 (-ax' + dz' - ew') + (bx' - dy' - fw') &= 0 \\ \sigma (ay' - bz' - cw') + \sigma_1 (-ax' + dz' - ew') + (cx' + ey' + fz') &= 0 \end{aligned}$$

Der dritte Koeffizient der Gleichung (4) wird von selbst gleich Null, wenn die ersten beiden verschwinden. Für die letzten 2 Gleichungen kann geschrieben werden:

$$(-a\varrho_1 + b)x' + (a\varrho - d)y' + (-b\varrho + d\varrho_1)z' - (c\varrho + e\varrho_1 + f)w' = 0 \quad (5)$$

$$(-a\sigma_1 + c)x' + (a\sigma + e)y' + (-b\sigma + d\sigma_1 + f)z' - (c\sigma + e\sigma_1)w' = 0 \quad (6)$$

Eliminiert man mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \varrho z' + \sigma w' \\ y' &= \varrho_1 z' + \sigma_1 w' \end{aligned}$$

x' und y' aus den Gleichungen (5) und (6), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (-a\varrho\varrho_1 + b\varrho + a\varrho\varrho_1 - d\varrho_1 - b\varrho + d\varrho_1)z' - (c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 - a(\varrho\sigma_1 - \varrho_1\sigma) + f)w' &= 0 \\ (c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 - a(\varrho\sigma_1 - \varrho_1\sigma) + f)z' + (-a\sigma\sigma_1 + c\sigma + a\sigma\sigma_1 + e\sigma_1 - c\sigma - e\sigma_1)w' &= 0 \end{aligned}$$

Da in diesen Gleichungen der erste und der vierte Koeffizient verschwinden, der zweite und der dritte aber einander gleich sind, so ist die einzige Bedingung, welcher die Gerade (3) zu genügen hat, um Strahl des durch das Nullsystem bestimmten linearen Komplexes zu sein, diejenige, daß

$$C \equiv c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 - a\eta + f = 0 \quad (C)$$

ist, wo η den Wert $\varrho \sigma_1 - \varrho_1 \sigma$ hat. Die Gleichung (C) ist also als Gleichung des zu (N) gehörigen Strahlenkomplexes aufzufassen.

NB. Werden a und f gleich Null, und nur in diesem Falle, so sind die Tetraederkanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ Strahlen des Komplexes. Setzt man dann $c = A$, $b = -B$, $e = C$, $d = D$, so werden die Gleichungen (N) und (C) dieses § identisch mit der Gleichung (7) des § 8, wenn man x, y mit z, w vertauscht, bzw. mit Gleichung (C) desselben §. Die beiden letztern Gleichungen sind daher als Spezialfälle in den ersteren beiden enthalten. —

Hat man zwei lineare Strahlenkomplexe, so müssen die Konstanten $\varrho \sigma \varrho_1 \sigma_1$ derjenigen Strahlen, welche beiden Komplexen zugleich angehören, den Gleichungen beider Komplexe genügen. Dieselben seien:

$$C \equiv c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 - a\eta + f = 0$$

$$C_1 \equiv c_1\varrho + e_1\varrho_1 - b_1\sigma + d_1\sigma_1 - a_1\eta + f_1 = 0.$$

Da also $\varrho \sigma \varrho_1 \sigma_1$ nur 2 Gleichungen zu befriedigen haben, so erhält man eine zweifach unendliche Schar von Strahlen, die beiden Komplexen gemein sind. Dieselben können sich nicht alle in einem Punkte schneiden, da durch jeden Punkt des Raumes in jedem Komplex nur ein gewöhnlicher Strahlenbüschel geht. Man kann also das Koordinatentetraeder so legen, daß die Kanten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ sowie $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ in 2 gemeinsame Strahlen der beiden Komplexe hineinfallen. Das ist so viel, als wenn man a, f, a_1, f_1 gleich Null macht. Geschieht dies, so werden die beiden Gleichungen, denen die Konstanten der gemeinsamen Strahlen zu genügen haben, folgende sein:

$$c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 = 0$$

$$c_1\varrho + e_1\varrho_1 - b_1\sigma + d_1\sigma_1 = 0.$$

Drückt man aus diesen σ und σ_1 als lineare homogene Funktionen von ϱ und ϱ_1 aus und setzt die erhaltenen Werte in die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \varrho z + \sigma w \\ y = \varrho_1 z + \sigma_1 w \end{cases}$$

ein, so werden letztere:

$$x = \varrho (z + Aw) + \varrho_1 \cdot Bw$$

$$y = \varrho_1 (z + B_1w) + \varrho \cdot A_1w,$$

wo $A B A_1 B_1$ bekannte Konstanten sind. Die Form der Gleichungen

(7) beweist, wenn man sie mit den Gleichungen (3) des § 6 zusammenstellt, daß sie ein Strahlensystem 1. Ord. und 1. Kl. darstellen. 2 lineare Strahlenkomplexe haben die sämtlichen Strahlen eines Systems 1. Ordnung und 1. Klasse mit einander gemein.

Hat das Strahlensystem 2 Achsen, so besteht es aus allen dieselben schneidenden Geraden. Diese Geraden sind aber Strahlen in beiden Komplexen C und C_1 . Nimmt man 2 beliebige Punkte P und P_1 der ersten Achse, so gehen durch dieselben 2 gewöhnliche Strahlenbüschel, deren Ebenen die zweite Achse enthalten. Diese Strahlenbüschel liegen aber in den Nullebenen der Punkte P und P_1 in den beiden Nullsystemen, welche zu C und C_1 gehören. Die Ebenen beider Strahlenbüschel schneiden sich also in der Geraden PP_1 (d. h. der ersten Achse des Strahlensystemes) in beiden Nullsystemen zugeordneten Geraden. Da dieser Schnitt aber, wie gesehen wurde, die zweite Achse ist, so ergibt sich: Hat das Strahlensystem 2 Achsen, so sind dieselben in jedem der beiden zu den Komplexen gehörigen Nullsysteme einander zugeordnet.

Hat man 3 lineare Strahlenkomplexe

$$C \equiv c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 - a\eta + f = 0$$

$$C_1 \equiv c_1\varrho + e_1\varrho_1 - b_1\sigma + d_1\sigma_1 - a_1\eta + f_1 = 0$$

$$C_2 \equiv c_2\varrho + e_2\varrho_1 - b_2\sigma + d_2\sigma_1 - a_2\eta + f_2 = 0,$$

so bilden alle Strahlen, welche den 3 Komplexen gemein sind, eine einfach unendliche Schar von Geraden, d. h. eine Regelfläche, da die 4 Konstanten $\varrho \sigma \varrho_1 \sigma_1$ 3 Bedingungsgleichungen zu genügen haben. Voraussetzung dabei ist jedoch, daß die 3 Gleichungen $C=0$, $C_1=0$, $C_2=0$ von einander unabhängig sind. Eine Gerade der Regelschar kann man zur Tetraederkante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ machen.

Da $\begin{cases} x = \varrho z + \sigma w \\ y = \varrho_1 z + \sigma_1 w \end{cases}$ die Gleichungen einer beliebigen Geraden sind, deren Konstanten die 3 Bedingungen zu erfüllen haben, und die Gleichungen $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ in ihnen nur für $\varrho = \sigma_1 = \infty$ oder $\varrho_1 = \sigma = \infty$ enthalten sind, so muß notwendig in den 3 Bedingungsgleichungen $a = a_1 = a_2 = 0$ werden. Dann erhält man aber 3 lineare, nicht homogene Gleichungen zwischen $\varrho \sigma \varrho_1 \sigma_1$. Aus ihnen kann man σ , ϱ_1 , σ_1 als lineare Funktionen von ϱ ausdrücken und bekommt dadurch als Gleichungen eines Strahles, der allen 3 Komplexen zugleich angehört:

$$\begin{cases} x = \varrho (z + Aw) + Bw \\ y = \varrho (Cz + Dw) + C_1 z + D_1 w, \end{cases}$$

wo $A B C D C_1 D_1$ bekannte Konstanten sind. Durch Elimination von ϱ aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich eine quadratische Gleichung in $x y z w$, d. h. die Gleichung einer Regelfläche 2ten Grades; dieselbe kann auch zuweilen in ein System von 2 Ebenen degenerieren. Im letztern Falle bilden die den 3 Komplexen gemeinschaftlichen Strahlen 2 gewöhnliche Strahlenbüschel. Nun bestimmen C_1 und C ein Strahlensystem, ebenfalls auch C_1 und C_2 ein Strahlensystem. Beide Systeme gehören demselben linearen Komplex C_1 an. Also folgt: 2 Strahlensysteme, die Bestandteile desselben linearen Komplexes sind, haben im Allgemeinen eine Regelschar 2ter Ordnung gemein.

Hat man 4 unabhängige Gleichungen von 4 Strahlenkomplexen, nämlich außer den Gleichungen $C = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ noch die Gleichung $C_3 = c_3 \varrho + e_3 \varrho_1 - b_3 \sigma + d_3 \sigma_1 - a_3 \eta + f_3 = 0$, so kann man aus ihnen $\varrho \varrho_1 \sigma \sigma_1$ als lineare Funktionen von η oder $\varrho \sigma_1 - \varrho_1 \sigma$ berechnen. Setzt man diese Werte in die Gleichung $\eta = \varrho \sigma_1 - \varrho_1 \sigma$ ein, so erhält man eine quadratische Gleichung in η , also je 2 Werte für $\varrho \sigma \varrho_1 \sigma_1$. Dieselben können auch imaginär werden. Es giebt also höchstens 2 Strahlen, die 4 Komplexen oder, was dasselbe ist, 2 nicht in demselben Komplexen enthaltenen Strahlensystemen zugleich angehören.

Die quadratische Gleichung in η kann auch identisch erfüllt sein. Dann haben die beiden Strahlensysteme unendlich viele Strahlen gemein. Nimmt man 3 beliebige derselben, so müssen sie sich in einem einzigen Punkte schneiden. Schnitten sie sich nämlich nicht, so würden sie eine Regelschar bestimmen, die beiden Systemen zugleich angehörte. Da aber eine solche Schar schon durch 3 Komplexe bestimmt wird, so müßte die Gleichung des vierten abhängig sein von denen der andern, was wider die Voraussetzung ist. Schnitten sie sich in mehr als einem Punkte, so müßten die Schnittpunkte Mittelpunkte von gewöhnlichen Strahlenbüscheln sein, die allen 4 Komplexen angehören. Sind es 2 Strahlenbüschel, so ist dieser Fall nur ein spezieller Fall dessen, wo 3 Komplexe eine Regelschar 2ter Ordnung gemein haben. Also sind dann wieder die Gleichungen der 4 gegebenen Komplexe nicht unabhängig von einander. 3 Büschel aber können es überhaupt nicht sein, da dann die 3 Schnittpunkte und die Büschel in einer Ebene lägen; jede Ebene kann aber höchstens einen einzigen Strahlen-

büschel des Systems enthalten. Die unendlich vielen Strahlen gehen also alle durch einen Punkt; dann aber müssen sie, wie aus § 2 bekannt ist, einen gewöhnlichen Büschel bilden. Folglich gilt der Satz: 2 Strahlensysteme, die nicht Bestandteile desselben Komplexes sind, haben höchstens 2 Strahlen gemein, oder in ganz besonderem Falle einen gewöhnlichen Strahlenbüschel.

§ 12.

In den bisherigen Entwicklungen ist das homogene Tetraederkoordinatensystem verwandt worden; für die nun folgenden Untersuchungen über Parallelität, Winkelverhältnisse u. s. w. ist das rechtwinklige cartesische System bequemer. Es läßt sich, wie in der Einleitung gezeigt wurde, aus dem ersten einfach dadurch ableiten, daß man in den bisherigen Gleichungen durch w dividiert und die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ auf einander senkrecht annimmt.

Die entstehenden Quotienten $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ sollen einfach mit x , y , z bezeichnet werden. Die Gleichung (N) des Nullsystems im § 11 wird dadurch folgende:

$$\begin{aligned} (ay' - bz' - c)x + (-ax' + dz' - e)y + (bx' - dy' - f)z \\ + (cx' + ey' + fz') = 0 \end{aligned} \quad (N)$$

Hat man eine beliebige Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$, so müssen die Koordinaten des Nullpunktes dieser Ebene nach § 11 den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} ay' - bz' - c &= \varrho A \\ -ax' + dz' - e &= \varrho B \\ bx' - dy' - f &= \varrho C \\ cx' + ey' + fz' &= \varrho D. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen, sowie aus der zweiten und dritten ϱ , so erhält man

$$\begin{aligned} aA \quad x' + aBy' - (bB + dA)z' + (eA - cB) &= 0 \\ (aC + bB)x' - dB y' - dC \quad z' + (eC - fB) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Dies sind die Gleichungen einer Geraden, denen die Koordinaten des Nullpunktes der Ebene zu genügen haben. Da sie beide D nicht enthalten, so folgt: Die Nullpunkte aller Ebenen, für die A , B , C gleich, D aber verschieden ist, d. h. die Nullpunkte einer

Schar von parallelen Ebenen liegen auf einer bestimmten Geraden. Sind λ, μ, ν die Richtungscosinus dieser Geraden, so ist leicht ersichtlich, daß

$$\lambda : \mu : \nu = d : b : a \quad (2)$$

ist. λ, μ, ν sind also unabhängig von den Größen A, B, C . Es liegen daher die Nullpunkte von beliebigen Scharen paralleler Ebenen stets auf parallelen Geraden. Wählt man eine dieser Geraden aus, so ist die ihr zugeordnete Gerade durch den Schnitt der Nullebenen von 2 ihrer Punkte bestimmt. Diese Nullebenen sind aber parallel, schneiden sich also im Unendlichen. Es gilt also der Satz: Im Nullsystem laufen alle Geraden, deren zugeordnete unendlich fern liegen, zu einander parallel.

Die parallelen Geraden mögen Durchmesser heißen in Bezug auf die jedesmalige Schar von parallelen Ebenen, deren Nullpunkte sie verbinden.

Die Richtungscosinus der Normalen einer Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sind proportional den Koeffizienten A, B, C . Soll also ein Durchmesser senkrecht auf seinen Ebenen stehen, so muß $A : B : C = d : b : a$ sein.

Da über die Lage der Koordinatenebenen nichts weiter ausgemacht ist, als daß sie zu einander senkrecht liegen, so kann man die z -Achse parallel den sämtlichen Durchmessern des Nullsystems annehmen. Dann werden λ und μ gleich Null, also $d = 0$ und $b = 0$. Die Gleichung des Nullsystems wird also:

$$(ay' - c)x - (ax' + e)y - fz + (cx' + ey' + fz') = 0.$$

Der Nullpunkt der Ebene $z = 0$ bestimmt sich durch die Gleichungen:

$$ay' - c = 0$$

$$ax' + e = 0.$$

Er hat also die Koordinaten:

$$x' = -\frac{e}{a}$$

$$y' = \frac{c}{a}$$

$$z' = 0.$$

Legt man nun den Anfangspunkt des Koordinatensystems so, daß er mit diesem Nullpunkt zusammenfällt, so wird $e = 0$ und $c = 0$ werden. Dann fällt der Durchmesser der der Ebene $z = 0$ parallelen Ebenen in die z -Achse. Die Gleichung des Nullsystems wird dadurch schließlich:

$$xy' - x'y = k(z - z'), \quad (N')$$

wenn k gleich $\frac{f}{a}$ gesetzt wird.

Die z -Achse ist ein Durchmesser, welcher senkrecht steht auf den ihm zugehörigen Ebenen. Ein solcher Durchmesser soll Hauptlinie heißen. Das Nullsystem hat nur diese eine Hauptlinie, denn zu jeder Schar paralleler Ebenen gehört nur ein Durchmesser, und alle diese Durchmesser sind einander parallel. Man hat daher den Satz: Im Nullsystem steht eine einzige Gerade senkrecht auf den Ebenen, welche durch die ihr zugeordnete unendlich ferne Gerade hindurch gehen.

$$\text{Ist} \quad \begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases} \quad (3)$$

eine Gerade im Raume, so ist die ihr im Nullsysteme N' zugeordnete Gerade:

$$\begin{cases} x = \frac{k}{mb - na} (mz + a) \\ y = \frac{k}{mb - na} (nz + b), \end{cases} \quad (4)$$

wie man leicht findet, wenn man zu den Punkten $(a, b, 0)$ und $\left(0, \frac{mb - na}{m}, -\frac{a}{m}\right)$ von (3) die zugehörigen Nullebenen bestimmt. Ist $mb - na$ ungleich Null, so schneiden die Geraden (3) und (4) die Hauptlinie (d. h. die z -Achse) nicht. In diesem Falle bestimmen (3) und (4) und die z -Achse eine Regelfläche 2ten Grades; deren Gleichung ist, wenn die x -Achse so gelegt wird, daß sie durch (3) geht, d. h. wenn $b = 0$ gesetzt wird:

$$nxz - myz - ay = 0.$$

Die Fläche enthält die beiden Regelscharen:

$$\begin{cases} nx - my = \kappa a \\ y = \kappa z \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} nx - my = \lambda y \\ \lambda z = a. \end{cases}$$

Zur ersten Regelschar gehören die Geraden (3) und (4), ferner die z -Achse und die ihr zugeordnete unendlich ferne Gerade. Die betreffenden Werte des Parameters κ sind $n, \frac{kn}{mb - na}, 0, \infty$. Die Geraden der ersten Schar sind alle parallel der Ebene $nx - my = 0$, die der zweiten der Ebene $z = 0$; die Regelfläche ist also ein hyperbolisches Paraboloid, und zwar ein gleichseitiges, da die beiden Ebenen senkrecht auf einander stehen. Mithin folgt: Die Hauptlinie liegt mit je 2 einander zugeordneten Geraden,

die sie nicht schneiden, in einem gleichseitigen Paraboloid.

Die Erzeugenden der zweiten Schar sind alle parallel der Ebene $z = 0$; sie gehen durch die Hauptlinie und stehen auf ihr senkrecht. Eine Erzeugende dieser Schar steht auf den Geraden (3) und (4) dann senkrecht, wenn

$$\frac{m}{n} = -\frac{n}{m + \lambda}, \text{ d. h. } \lambda = -\frac{m^2 + n^2}{m}$$

ist. Es giebt also nur eine solche Gerade; sie ist die Linie des kürzesten Abstandes von (3) und (4). Also: Die Hauptlinie schneidet die Linie des kürzesten Abstandes von 2 zugeordneten Geraden rechtwinklig.

§ 13.

Das Nullsystem hat, wie gezeigt wurde, eine einzige Hauptlinie; durch das Nullsystem wird ein linearer Strahlenkomplex eindeutig bestimmt; zu diesem gehören alle Geraden, welche senkrecht auf der Hauptlinie des Nullsystems stehen, denn diese verbindet die Nullpunkte aller auf ihr senkrechten Ebenen, die auf ihr senkrechten Geraden liegen also jedes Mal in der Nullebene eines ihrer Punkte, sind also nach § 11 Strahlen des Komplexes. Die Hauptlinie des Nullsystems ist, wie leicht zu ersehen, die einzige Gerade, auf der alle durch sie gehenden Strahlen des Komplexes C senkrecht stehen. Also: Jeder lineare Komplex enthält eine einzige Gerade, welche auf allen sie schneidenden Strahlen senkrecht steht, d. h. eine einzige Hauptlinie.

Ist die Hauptlinie eines Komplexes gegeben, so kann man dieselbe zur z -Achse machen; dann wird die Gleichung des zum Komplex gehörigen Nullsystems:

$$xy' - x'y = k(z - z').$$

Die Gleichungen von 2 einander zugeordneten Geraden des Nullsystems waren für diesen Fall im vorigen § aufgestellt worden, es waren die Gleichungen (3) und (4). Die beiden Geraden fallen zusammen, d. h. werden ein Strahl des Komplexes, wenn $k = mb - na$ ist. Die Konstanten m, n, a, b einer beliebigen Geraden des Raumes haben also nur diese Gleichung zu befriedigen, damit die Gerade Strahl des Komplexes sei. Bezeichnet man den Ausdruck $mb - na$ mit η' , wie früher der analoge Ausdruck $\varrho\sigma_1 - \varrho_1\sigma$ mit η bezeichnet wurde, so ist $\eta' = k$ die einzige Bedingung, der die

Konstanten der Gleichungen eines Komplexstrahles genügen müssen. Der Komplex wird also bestimmt sein, wenn k bekannt ist. k wird aber dadurch bestimmt, daß eine Gerade $\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$ gegeben wird, welche Strahl des Komplexes sein soll. Denn in diesem Falle ist $mb - na = k =$ gegebene Größe.

In speziellen Fällen ist k gleich Null, unendlich oder unbestimmt. Der erste Fall tritt ein, wenn $mb - na = 0$ ist, d. h. wenn der gegebene Strahl die Hauptlinie schneidet. Die Gleichung des Komplexes ist dann $\eta' = 0$; sie zeigt, daß der Komplex aus allen die Hauptlinie schneidenden Geraden besteht. Dieser Fall aber war (§ 8) ausdrücklich bei unsern Untersuchungen ausgeschlossen worden. Ist ferner $k = \infty$, so muß entweder m oder n oder a oder b gleich ∞ sein. Ist m oder n unendlich, so liegt der gegebene Strahl in der Ebene $z = 0$, also senkrecht zur Hauptlinie. Ist a oder b unendlich, so liegt er im Unendlichen. Auf jeden Fall ist dann die Gleichung des Nullsystems $z - z' = 0$; jeder Ebene entsprechen also unendlich viele Nullpunkte, d. h. diese Gleichung stellt gar kein Nullsystem dar; der Fall $k = \infty$ kann also auch keinen Komplex ergeben. Ist schließlich k unbestimmt, so läßt sich leicht nachweisen, daß dann der gegebene Strahl entweder unbestimmt sein muß, oder im Unendlichen liegt, oder die Hauptlinie schneidet. Es ergibt sich daher der Satz: Durch seine Hauptlinie und einen Strahl, der sie weder schneiden, noch senkrecht auf ihr stehen, noch im Unendlichen liegen darf, ist ein linearer Strahlenkomplex bestimmt.

Hat man einen beliebigen Strahl des Komplexes und nennt denjenigen Punkt, in welchem er seinen kürzesten Abstand von der Hauptlinie hat, P , so liegt P in einer gewissen Ebene $z = l$, welche die Linie des kürzesten Abstandes des Strahles und der Hauptlinie enthält. Der Abstand der beiden Geraden sei a' , der Winkel, den sie bilden, α' . Die Nullebene von P ist $xy' - x'y = k(z - l)$. Die letzte Gleichung ist für das Wertsystem $(0, 0, l)$ erfüllt, d. h. die Nullebene enthält die Linie des kürzesten Abstandes der Hauptlinie und des Strahles. Der Winkel, welchen die Nullebene mit der Ebene $z = l$ bildet, ist das Komplement von α' . Setzt man nun

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha, & x' &= a' \cos \alpha', \\ y &= a \sin \alpha, & y' &= a' \sin \alpha', \end{aligned}$$

so wird die Gleichung des Nullsystems:

$$aa' \cos \alpha \sin \alpha' - aa' \sin \alpha \cos \alpha' = k(z - l)$$

oder $a a' \sin (\alpha' - \alpha) = k (z - l)$

oder schließlich: $\frac{z - l}{a \sin (\alpha' - \alpha)} = \frac{a'}{k}$.

x und y sind die Koordinaten der Projektion eines beliebigen Punktes der Nullebene auf die Ebene $z = l$. Ist M der Schnittpunkt der Ebene $z = l$ mit der z -Achse, so ist $a \sin (\alpha' - \alpha)$ der Abstand des projizierten Punktes von MP , also $\frac{z - l}{a \sin (\alpha' - \alpha)}$ gleich der Tangente des Neigungswinkels, den die Nullebene mit der Ebene $z = l$ bildet, d. h. $= \cotg \alpha'$. Also ist

$$\cotg \alpha' = \frac{a'}{k} \text{ oder } a' \tg \alpha' = k = \text{const.}$$

Es ist daher das Produkt des Abstandes eines Strahles von der Hauptlinie des Komplexes und der Tangente des Neigungswinkels der beiden Geraden eine konstante Größe.

Ist umgekehrt für irgend eine Gerade des Raumes das Produkt $a' \tg \alpha'$ gleich k , so kann man durch die Gerade und die Linie des kürzesten Abstandes zwischen ihr und der Hauptlinie eine Ebene legen. Ist $P = (x' y' z')$ der Schnittpunkt der Geraden mit der Linie des kürzesten Abstandes, so ist $z - z'$ die Länge der Projektion irgend eines Punktes der eben konstruierten Ebene auf die Ebene $z = z'$; ferner ist wieder wie vorhin $a \sin (\alpha' - \alpha)$ der Abstand des projizierten Punktes von MP . Der Quotient $\frac{z - z'}{a \sin (\alpha' - \alpha)}$

ist notwendig gleich $\cotg \alpha' = \frac{1}{\tg \alpha'}$, also nach Voraussetzung $= \frac{a'}{k}$.

Es folgt also $k (z - z') = a a' \sin (\alpha' - \alpha)$. $a a' \sin (\alpha' - \alpha)$ ist aber gleich $xy' - x'y$, also besteht zwischen den Koordinaten des Punktes P und den laufenden Koordinaten der konstruierten Ebene die Beziehung $xy' - x'y = k (z - z')$, d. h. die Ebene ist die Nullebene des Punktes P , und infolgedessen ist die betrachtete Gerade Strahl des Komplexes, da sie in der Nullebene eines ihrer Punkte liegt. Also: Jede Gerade, für die das Produkt $a' \tg \alpha'$ gleich der konstanten Größe k ist, ist Strahl des Komplexes.

Verschiebt man den Anfangspunkt des Koordinatensystems auf der z -Achse, so verändert sich die Gleichung $xy' - x'y = k (z - z')$ nicht, da zwar z und z' sich ändern, die Differenz $z - z'$ aber ihren Wert behält. Ebensowenig ändert sich die Gleichung, wenn man das Koordinatensystem um die z -Achse dreht. Denn dann ändern

sich allerdings $x y x' y'$, aber der Ausdruck $xy' - x'y$ bleibt sich gleich; er stellt nämlich den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks dar, dessen Ecken der Koordinatenanfangspunkt, die Projektion des Punktes $(x y z)$ und die des Punktes $(x' y' z')$ auf die Ebene $z = 0$ sind. Alle Strahlenkomplexe also, die aus einem Komplex durch Verschiebung parallel zur Hauptlinie und durch Drehung um dieselbe entstehen, fallen mit dem ursprünglichen zusammen.

Der letzte Satz läßt sich auch einfach so beweisen: Weder durch Verschiebung parallel mit der Hauptlinie, noch durch Drehung um dieselbe wird der Wert des Produktes $\alpha' \operatorname{tg} \alpha'$, der für alle Strahlen des Komplexes der nämliche ist, geändert. Die sämtlichen neuen Strahlen sind also wieder Strahlen des alten Komplexes.

§ 14.

Durch die Gleichungen von 2 linearen Strahlenkomplexen ist nach § 11 ein Strahlensystem eindeutig bestimmt. Sind die beiden Gleichungen

$$C \equiv c\rho + e\rho_1 - b\sigma + d\sigma_1 - a\eta + f = 0$$

$$C_1 \equiv c_1\rho + e_1\rho_1 - b_1\sigma + d_1\sigma_1 - a_1\eta + f_1 = 0,$$

so ist die Gleichung $C + kC_1 = 0$ die eines gewissen Komplexes, welcher das Strahlensystem enthält, denn sie wird befriedigt, wenn gleichzeitig $C = 0$ und $C_1 = 0$ gesetzt werden. Läßt man k variieren, so erhält man eine Schar von Komplexen, die alle das Strahlensystem enthalten, und außer Komplexen von der Form $C + kC_1 = 0$ giebt es keine, die durch das Strahlensystem gehen.

Wenn man (§ 11) das Koordinatentetraeder so wählte, daß die Kante $\begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ in einen Strahl des Systems hineinfiel, so verschwand a und a_1 . Das gilt auch noch, wenn die Koordinatenebene $w = 0$ ins Unendliche rückt, da in jeder Ebene ein Strahl des Systems enthalten ist, also auch in der unendlich fernen. Rückt man aber $w = 0$ ins Unendliche, so geht man zu dem gewöhnlichen cartesischen Koordinatensystem über, wenn noch die 3 andern Koordinatenebenen senkrecht auf einander angenommen werden. Man hat also das Koordinatensystem jetzt so bestimmt, daß die Ebene $z = 0$ den unendlich fernen Strahl des Systems enthält.

Die Gleichungen eines beliebigen Strahles des Systems sind also:

$$\begin{cases} x = \varrho z + \sigma \\ y = \varrho_1 z + \sigma_1, \end{cases}$$

wobei die Bedingungen zu erfüllen sind:

$$C \equiv c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 + f = 0$$

$$C_1 \equiv c_1\varrho + e_1\varrho_1 - b_1\sigma + d_1\sigma_1 + f_1 = 0.$$

Für die letzten beiden Gleichungen kann auch geschrieben werden:

$$C + \kappa C_1 = 0$$

$$C + \kappa_1 C_1 = 0.$$

Jeder der unendlich vielen Komplexe, welche durch das Strahlensystem S gehen, besitzt eine Hauptlinie. Durch jeden Punkt dieser Hauptlinie gehen unendlich viele Strahlen des Komplexes, welche einen gewöhnlichen, auf der Hauptlinie senkrecht stehenden Strahlenbüschel bilden. Jede Gerade des Raumes geht aber durch unendlich viele Strahlen von S , also auch die Hauptlinie irgend eines Komplexes, welcher S enthält. Alle Strahlen von S , welche diese Hauptlinie schneiden, müssen dem betreffenden Komplex angehören, d. h. müssen senkrecht auf der Hauptlinie des Komplexes stehen. Die Hauptlinie jedes S enthaltenden Komplexes ist also auch Hauptlinie von S , und da es unendlich viele solcher Komplexe giebt, so hat S unendlich viele Hauptlinien. Also: Ein Strahlensystem S besitzt unendlich viele Hauptlinien.

Im Allgemeinen kann ein linearer Komplex bestimmt werden, welcher irgend eine Hauptlinie von S als seine Hauptlinie enthält und durch S hindurchgeht. Denn eine Hauptlinie von S kann niemals Achse sein, da alle durch sie gehenden Strahlen senkrecht auf ihr stehen. S besitzt daher stets Strahlen, welche nicht durch die Hauptlinie h gehen. Durch h und einen solchen Strahl s ist aber im Allgemeinen nach § 13 ein linearer Komplex völlig bestimmt. Derselbe enthält S_1 , da er mit S 4 Strahlen gemein hat, die nicht in einer Regelfläche liegen, nämlich s und 3 beliebige windschiefe, auf h senkrechte Strahlen. Der Komplex ließe sich nicht bestimmen, wenn h senkrecht zu s läge (§ 13). Dieser Fall ist aber im Allgemeinen unmöglich; denn s wird dann durch einen bestimmten Strahl a geschnitten, welcher durch h geht. Der Schnittpunkt von a und s muß Punkt einer Achse von S sein, und ebenso muß die Ebene von a und s durch eine Achse hindurch gehen. h würde senkrecht zu der letzten Achse liegen, die u heißen mag. Da aber alle durch h gehenden Strahlen u schneiden müssen, so

können dieselben nur dann senkrecht auf h stehen, wenn u im Unendlichen liegt. Schließt man also vorläufig den Fall aus, daß das Strahlensystem S eine unendlich ferne Achse u hat, so findet man, daß sich stets ein durch S gehender linearer Komplex bestimmen läßt, welcher eine Hauptlinie h von S als seine Hauptlinie enthält. Mithin ist jede Hauptlinie von S die Hauptlinie eines durch S gehenden linearen Komplexes.

Daraus folgt sofort: Der Abstand irgend einer Hauptlinie von S von irgend einem Strahle von S , multipliziert mit der Tangente des Neigungswinkels der beiden Geraden, giebt ein für alle Strahlen konstantes Produkt.

Betrachtet man nun einen beliebigen Komplex $C + \kappa C_1 = 0$, der durch S geht, so lassen sich die Gleichungen von dessen Hauptlinie bestimmen. Denn in § 12, (1) sind die Gleichungen des Durchmessers einer beliebigen Schar paralleler Ebenen gegeben worden. Dieselben werden aber zu Gleichungen der Hauptlinie, wenn $A : B : C = d : b : a$ angenommen wird. Dadurch erhält man:

$$(h) \begin{cases} [(b + \kappa b_1)^2 + (d + \kappa d_1)^2] z - [(d + \kappa d_1)(e + \kappa e_1) - (b + \kappa b_1)(c + \kappa c_1)] = 0 & (2) \\ (b + \kappa b_1) x - (d + \kappa d_1) y - (f + \kappa f_1) = 0 & (3) \end{cases}$$

Die Gleichung (2) zeigt, daß die Hauptlinien sämtlicher durch S gehender Komplexe parallel der Ebene $z = 0$ liegen. Diese Hauptlinien liegen ferner in Ebenen, deren Gleichungen nach (3) die Form haben:

$$(b + \kappa b_1) x - (d + \kappa d_1) y - (f + \kappa f_1) = 0$$

oder:

$$bx - dy - f + \kappa (b_1 x - d_1 y - f_1) = 0.$$

Diese sämtlichen Ebenen schneiden sich in der Geraden

$$\begin{cases} bx - dy - f = 0 \\ b_1 x - d_1 y - f_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Die Hauptlinien aller Komplexe des Strahlensystems gehen also durch eine bestimmte Gerade (4). Dieselbe liegt senkrecht zur Ebene $z = 0$, schneidet daher alle Hauptlinien rechtwinklig. Durch jeden Punkt von (4) gehen 2 Hauptlinien. Denn giebt man $x y$ Werte, welche (4), also auch (3) befriedigen, und erteilt z einen beliebigen Wert, so ergiebt die Gleichung (2) 2 Werte für κ , durch z ausgedrückt, also 2 Hauptlinien. Die Gleichungen (4) kann man schreiben:

$$x = \frac{fd_1 - f_1 d}{bd_1 - b_1 d}, \quad y = -\frac{bf_1 - b_1 f}{bd_1 - b_1 d}. \quad (5)$$

Aus (5) ist sofort zu ersehen, daß die Konstanten der Geraden (4) den beiden Gleichungen $C = 0$ und $C_1 = 0$ dieses Paragraphen genügen, d. h. daß die Gerade (4) ein Strahl des Systems S ist. Es ergibt sich somit der Satz: Die Hauptlinien eines Systems S schneiden sich paarweise auf einem bestimmten Strahle von S , der sie alle rechtwinklig kreuzt.

Man betrachte nun den speziellen Fall, daß $bd_1 - b_1d = 0$ ist. In diesem Falle rückt der Strahl, den alle Hauptlinien von S schneiden, ins Unendliche.

Es sind die Richtungscosinus einer beliebigen Hauptlinie

$$\lambda : \mu : \nu = d + \kappa d_1 : b + \kappa b_1 : 0.$$

Ist $bd_1 - b_1d = 0$, so ergibt sich hieraus: $\lambda : \mu : \nu = d : b : 0$. Also liegen alle Hauptlinien einander parallel.

Sind λ_1, μ_1, ν_1 die Richtungscosinus eines beliebigen Strahles von S , so ist

$$\lambda_1 : \mu_1 : \nu_1 = \varrho : \varrho_1 : 1.$$

Nun bestehen die Gleichungen:

$$c\varrho + e\varrho_1 - b\sigma + d\sigma_1 + f = 0$$

$$c_1\varrho + e_1\varrho_1 - b_1\sigma + d_1\sigma_1 + f_1 = 0.$$

Multipliziert man die erste mit d_1 , die zweite mit d , und subtrahiert, so erhält man, da $bd_1 - b_1d = 0$ ist:

$$(cd_1 - c_1d)\varrho + (ed_1 - e_1d)\varrho_1 + (fd_1 - f_1d) = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung zeigt, daß sämtliche Strahlen von S parallel sind der Ebene

$$(cd_1 - c_1d)x + (ed_1 - e_1d)y + (fd_1 - f_1d)z = 0. \quad (7)$$

Denn die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene sind proportional den Koeffizienten ihrer Gleichung, und diese geben, mit den entsprechenden Richtungscosinus eines beliebigen Strahles multipliziert, und addiert, eine Summe, die nach (6) gleich Null ist, d. h. Normale und Strahl stehen senkrecht auf einander.

Die sämtlichen Strahlen des Systems liegen also in Ebenen, welche parallel der Ebene (7) sind, sie schneiden also alle den unendlich fernen Schnitt dieser parallelen Ebenen; d. h. das Strahlensystem besitzt eine unendlich ferne Achse. Jede Gerade, welche die parallelen Ebenen senkrecht schneidet, steht auf allen durch sie gehenden Strahlen von S senkrecht, ist also eine Hauptlinie von S . Es folgt also: Besitzt das Strahlensystem eine unendlich ferne Achse, so ist jede Gerade, welche auf

den diese Achse enthaltenden Ebenen senkrecht steht, eine Hauptlinie von S .

Außer diesen uneigentlichen Hauptlinien besitzt das Strahlensystem immer noch die eigentlichen, d. h. diejenigen, welche zugleich Hauptlinien von Komplexen sind, die durch S gehen. Dies würde nicht der Fall sein, wenn irgend ein Strahl, der eine eigentliche Hauptlinie nicht schneidet, senkrecht zu derselben läge. Denn wie gesehen wurde, giebt es dann keinen Komplex, der durch S ginge und die Hauptlinie als seine Hauptlinie enthielte. Es läßt sich aber zeigen, daß sämtliche Strahlen von S , die senkrecht zu einer beliebigen eigentlichen Hauptlinie liegen, in dem Falle, daß $b d_1 - b_1 d = 0$ ist, d. h. S eine unendlich ferne Achse besitzt, die Hauptlinie schneiden müssen.

Die eigentlichen Hauptlinien liegen, da ihre Richtungscosinus proportional $d, b, 0$ sind, parallel zu der Ebene $b x - d y = 0$, oder $b_1 x - d_1 y = 0$. Dreht man das Koordinatensystem so um die z -Achse, daß diese Ebene mit der Koordinatenebene $y = 0$ zusammenfällt, so heißt das so viel, als daß man $b = b_1 = 0$ setzt. Die Gleichungen einer beliebigen eigentlichen Hauptlinie sind dann:

$$\begin{cases} (d + \kappa d_1) z - (e + \kappa e_1) = 0 \\ (d + \kappa d_1) y + (f + \kappa f_1) = 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} dz - e + \kappa (d_1 z - e_1) = 0 \\ dy + f + \kappa (d_1 y + f_1) = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man aus den letzten beiden Gleichungen κ , so erhält man die Gleichung:

$$(d e_1 - d_1 e) y + (d f_1 - d_1 f) z - (e f_1 - e_1 f) = 0. \quad (8)$$

In der hierdurch dargestellten Ebene liegen also alle eigentlichen Hauptlinien.

Die Richtungscosinus eines beliebigen Strahles sind proportional $\varrho, \varrho_1, 1$, die einer eigentlichen Hauptlinie proportional $d, 0, 0$. Damit beide Geraden auf einander senkrecht stehen, muß daher $\varrho = 0$ sein. Nun genügen also die Konstanten des Strahles den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} e \varrho_1 + d \sigma_1 + f &= 0 \\ e_1 \varrho_1 + d_1 \sigma_1 + f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\varrho_1 = \frac{f_1 d - f d_1}{e d_1 - e_1 d}, \quad \sigma_1 = \frac{f e_1 - f_1 e}{e d_1 - e_1 d}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen des Strahles

$$\begin{cases} x = \sigma \\ y = \varrho_1 z + \sigma_1 \end{cases}$$

ein, so wird die zweite Gleichung:

$$(de_1 - d_1e)y + (df_1 - d_1f)z - (ef_1 - e_1f) = 0.$$

Dieselbe ist identisch mit der Gleichung (8); es schneiden mithin die Strahlen, welche zu eigentlichen Hauptlinien des Systems senkrecht liegen, sämtliche eigentliche Hauptlinien, da sie in der Ebene derselben liegen.

§ 15.

Der in § 11 angegebene Zusammenhang der Regelschar 2ter Ordnung mit dem Strahlensysteme und dem linearen Komplex berechtigt zu der Vermutung, daß für die Regelschar ähnliche Sätze gelten werden, wie sie in den letzten Paragraphen für den Komplex und das System abgeleitet worden sind. Betrachtet man in der That zwei beliebige Erzeugende einer Regelschar und die Linie ihres kürzesten Abstandes, so kann man zunächst annehmen, daß dieselbe nicht in der Regelfläche liegt, also die übrigen Erzeugenden nicht schneidet, und daß sie zu keiner derselben senkrecht steht.

Dann kann man stets einen linearen Komplex bestimmen, welcher die Linie des kürzesten Abstandes n zur Hauptlinie hat und eine beliebige n nicht schneidende Gerade der Regelschar als Strahl (§ 13) besitzt. Dieser Komplex enthält alle Individuen der Regelschar als Strahlen, da er 3 von ihnen enthält, nämlich den zu n windschiefen und die beiden auf n senkrechten (die letzteren müssen zum Komplex gehören, da sie auf seiner Hauptlinie senkrecht stehen). Es gilt daher für alle Geraden der Regelschar in Bezug auf n das, was in § 12 und § 13 für die Komplexstrahlen und die Hauptlinie bewiesen worden ist. Nämlich: 1) Das Produkt $a \operatorname{tg} \alpha$ ist für alle Individuen der Schar in Bezug auf n konstant. 2) Nach § 9 sind die Leitstrahlen der Regelschar in dem zum Komplex gehörigen Nullsystem einander paarweise zugeordnet. Also liegen (§ 12) je 2 Leitstrahlen mit n auf einem gleichseitigen Paraboloid, und die Linie des kürzesten Abstandes zwischen n und einem Leitstrahle trifft auch einen zweiten rechtwinklig.

Zweitens kann die Linie n des kürzesten Abstandes zwischen 2 Erzeugenden der Regelfläche zwar nicht in derselben liegen, aber senkrecht auf einer dritten Erzeugenden stehen. Dann läßt sich (§ 13) kein Komplex bestimmen, welcher durch die Regelschar geht und n als Hauptlinie enthält. Es möge n zur z -Achse gemacht werden. Die eine durch n gehende Gerade der Regelschar sei:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

die zweite:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ z - n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Die Gerade der Schar, welche senkrecht zu n liegt, sei:

$$\begin{cases} x - m_1 y - a = 0 \\ z - n_1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Die 3 Geraden bestimmen die Regelfläche

$$\begin{aligned} [(n - n_1)x + (m_1 n_1 - mn)y + az - na]z \\ - nn_1(m_1 - m)y = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

welche die beiden Regelscharen enthält:

$$\begin{cases} z = \kappa \cdot nn_1(m_1 - m) \\ y = \kappa \cdot [(n - n_1)x + (m_1 n_1 - mn)y + az - na] \end{cases} \quad (5)$$

und

$$\begin{cases} z = \lambda y \\ nn_1(m_1 - m) = \lambda [(n - n_1)x + (m_1 n_1 - mn)y + az - na] \end{cases} \quad (6)$$

Zur ersten Schar gehören die Geraden (1), (2), (3), d. h. die Gleichungen (5) stellen die gegebene Regelschar dar. Die Gleichungen (6) stellen die Leitstrahlen dieser Regelschar dar.

Die Geraden (5) sind alle parallel der Ebene $z = 0$.

Die Geraden (6) sind alle parallel der Ebene

$$(n - n_1)x + (m_1 n_1 - mn)y + az = 0.$$

Die Regelfläche (4) ist daher ein hyperbolisches Paraboloid, wie dies ohne weiteres klar ist.

Zur Schar (6) gehört, entsprechend dem Werte $\lambda = 0$, die unendlich ferne Gerade der Ebene $z = 0$. Dieselbe schneidet also jede Gerade, welche in einer der Ebene $z = 0$ parallelen Ebene liegt, und zwar unter unbestimmtem Winkel.

Da alle Geraden der Regelschar (5) senkrecht zur z -Achse, d. h. zur Geraden n liegen, so ist für dieselben in Bezug auf n der Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $\operatorname{tg} \alpha = \infty$. Das Produkt $a \operatorname{tg} \alpha$ ist also konstant gleich ∞ .

Die Linie des kürzesten Abstandes von n und einem Leitstrahle (6) muß die Gleichungen haben:

$$\begin{cases} y - qx = 0 \\ z = \sigma. \end{cases}$$

ϱ und σ sind für einen bestimmten Wert von λ zu berechnen. Man findet die beiden dazu nötigen Gleichungen, indem man erstens die Determinante aus den Gleichungen dieser Linie und denen des Leitstrahles bildet und dieselbe gleich Null setzt, und indem man zweitens die Bedingung dafür aufstellt, daß beide Geraden einen rechten Winkel mit einander bilden. Man bekommt so:

$$(m_1 n_1 - m n + a \lambda) \varrho \sigma + (n n_1 (m - m_1) - n a \lambda) \varrho + (n - n_1) \sigma = 0$$

$$(n_1 - n) \varrho + (m_1 n_1 - m n + a \lambda) \sigma = 0.$$

Aus beiden Gleichungen lassen sich ϱ und σ eindeutig bestimmen.

Jede dieser Linien des kürzesten Abstandes zwischen n und einem Leitstrahle (6) geht noch durch einen andern Leitstrahl, nämlich den unendlich fernen in der Ebene $z = 0$ liegenden, mit welchem sie einen unbestimmten Winkel bildet.

Es ist schließlich noch der Fall zu erörtern, daß die Linie n des kürzesten Abstandes von 2 Erzeugenden in der Regelfläche liegt, also die übrigen Erzeugenden ebenfalls schneidet. Dann ist für die Erzeugenden der Wert des Produktes $a \operatorname{tg} \alpha$ in Bezug auf n konstant gleich Null, da $a = 0$ ist oder, falls die Erzeugenden rechtwinklig auf n stehen, gleich $0 \cdot \infty$, also unbestimmt, mithin auch gleich Null. Als Linie des kürzesten Abstandes zwischen n und einem beliebigen Leitstrahle hat man eine Gerade, die die Regelfläche in mindestens 2 Punkten trifft. Trifft sie nur in 2, so schneidet sie 2 Leitstrahlen, nämlich außer dem eben beliebig gewählten noch n , welches ja auch Leitstrahl ist. Trifft sie in mehr als 2, so liegt sie ganz in der Fläche und ist ein Individuum der betrachteten Regelschar. Schneidet sie in diesem Falle noch einen dritten Leitstrahl rechtwinklig, so läßt sich beweisen, daß sie alle unter rechtem Winkel trifft, und daß die Regelfläche ein gleichseitiges Paraboloid ist. Denn macht man die Gerade, welche die 3 windschiefen Strahlen schneidet, zur z -Achse, so sind die Gleichungen der Strahlen identisch mit (1), (2), (3), nur daß hier $a = 0$ zu setzen ist. Die Gleichung der Regelfläche wird daher:

$$[(n - n_1) x + (m_1 n_1 - m n) y] z - n n_1 (m_1 - m) y = 0 \quad (4^a)$$

und ihre beiden Regelscharen sind:

$$\begin{cases} z = \kappa \cdot n n_1 (m_1 - m) \\ y = \kappa \cdot [(n - n_1) x + (m_1 n_1 - m n) y] \end{cases} \quad (5^a)$$

und

$$\begin{cases} z = \lambda y \\ n n_1 (m_1 - m) = \lambda [(n - n_1) x + (m_1 n_1 - m n) y] \end{cases} \quad (6^a)$$

Die Geraden (5^a) sind alle parallel der Ebene $z = 0$.

Die Geraden (6^a) sind alle parallel der Ebene

$$(n - n_1) + (m_1 n_1 - m n) y = 0.$$

Beide Ebenen stehen senkrecht auf einander, die Regelfläche ist also ein gleichseitiges Paraboloid.

Für die Richtungscosinus der Geraden (5^a) bestehen die Beziehungen:

$$\xi : \eta : \zeta = x (m_1 n_1 - m n) - 1 : x (n_1 - n) : 0,$$

für die der Geraden (6^a):

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = (m_1 n_1 - m n) : (n_1 - n) : \lambda (n - n_1).$$

Damit eine Erzeugende der einen Schar senkrecht stehe auf denen der andern Schar, muß sein:

$$x (m_1 n_1 - m n) - 1 : x (n_1 - n) : 0 = n - n_1 : m_1 n_1 - m n : 0$$

bezw.

$$m_1 n_1 - m n : n_1 - n : \lambda (n - n_1) = 0 : 0 : 1$$

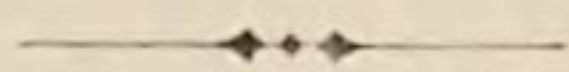
Daraus ergibt sich

$$x = \frac{m_1 n_1 - m n}{(n_1 - n)^2 + (m_1 n_1 - m n)^2}$$

$$\lambda = \infty.$$

Es giebt also in jeder Regelschar des gleichseitigen Paraboloids nur eine Gerade, welche auf allen Geraden der andern Schar senkrecht steht. Solche Gerade ist, entsprechend dem Werte $\lambda = \infty$, die Erzeugende, welche auf n und 2 Leitstrahlen senkrecht stehen sollte. Sie schneidet alle Leitstrahlen senkrecht, ist daher für alle die Linie des kürzesten Abstandes von n .

Läßt man die Resultate des zweiten und dritten Falles als Erweiterungen des gewöhnlichen, zuerst betrachteten Falles zu, so ergibt sich schließlich der Satz: Die Linie n des kürzesten Abstandes von 2 Erzeugenden einer Regelschar bestimmt mit einer beliebigen Erzeugenden dieser Schar das konstante Produkt $a \operatorname{tg} \alpha$; die Linie des kürzesten Abstandes zwischen n und einem beliebigen Leitstrahle schneidet noch einen zweiten Leitstrahl rechtwinklig. Die Leitstrahlen liegen also paarweise auf gleichseitigen Paraboloiden mit n .



VITA.

Ich bin am 20. Juni des Jahres 1866 als Sohn evangelischer Eltern zu Zahna in der preußischen Provinz Sachsen geboren worden, woselbst ich in der Taufe die Vornamen Friedrich Emil Hermann erhalten habe. Seit dem Anfang des Jahres 1867 bis jetzt habe ich in Berlin gelebt. Hier genoß ich zuerst privaten Unterricht und den einer Mittelschule, um dann zur Quarta des Leibniz-Gymnasiums überzugehen, welches ich im September 1883 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Im Oktober desselben Jahres ließ ich mich bei der philosophischen Fakultät der hiesigen Universität immatrikulieren und widmete mich während 8 Semester, deren eines ich in Freiburg i. Br. verlebte, dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften. Meine Lehrer waren hauptsächlich HETTNER, NETTO, STICKELBERGER, KNOBLAUCH, FUCHS, WEIERSTRASS, ZELLER, PAULSEN, v. HELMHOLTZ, v. HOFMANN, EICHLER (†), SCHWENDENER. Besonderen Einfluß auf meine Ausbildung hat Herr Professor FUCHS gehabt, dem ich auch wegen mancher freundlichen Unterstützung tiefgefühlten Dank schulde. Nach Beendigung meiner Studien meldete ich mich zur Ablegung der Prüfung für das höhere Lehrfach und bestand dieselbe Ende November des Jahres 1888.

Walther, Fritz

Zur Theorie des Strahlensystems 1. Ordnung und 1. Klasse und des linearen
Strahlenkomplexes analytische Ableitung einiger Sätze von Reye

1889

Math.a. 219 dm#Beibd.2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650512-9